THEORIE

der

trilinear-symmetrischen Elementargebilde.

Habilitationsschrift

welche

mit Genehmigung der philosophischen Facultät zu Marburg

zur

ERLANGUNG DER VENIA DOCENDI

am 25. April 1881

öffentlich vertheidigt werden wird

von

Dr. *Benno Klein.*

Marburg.
Universitäts-Buchdruckerei (R. Friedrich).
1881.

Inhalt.

Seite

Einleitung 1

I.

Projectivische Beziehung eines Elementargebildes auf die Reihe der Elementenpaare eines zweiten involutorischen Elementargebildes.

§. 1. Eindeutige Beziehung zwischen der Reihe der Punktpaare einer involutorischen Curve II. Ordnung und den Punkten ihrer Involutionsaxe 5

§. 2. Die Pole eines Punkts einer involutorischen Curve II. Ordnung bezüglich der Punktpaare derselben 7

§. 3. Ausdehnung des Vorigen auf Elementargebilde . . . 9

§. 4. Projectivische Verwandtschaft eines gewöhnlichen zur Reihe der Elementarpaare eines involutorischen Elementargebildes . 10

§. 5. Die projectivische Beziehung einer gegebenen involutorischen zu einer gewöhnlichen Reihe ist durch drei Paare einander entsprechender Elemente bestimmt 12

§. 6. Erzeugniss einer involutorischen geraden Punktreihe mit einer zu ihr projectivischen gewöhnlichen geraden Punktreihe, deren gemeinschaftlicher Punkt sich selbst entspricht . . 13

§. 7. } Durch fünf Paare einander entsprechender Elemente ist
§. 8. } zwischen zwei Elementargebilden i. A. eine Verwandtschaft festgelegt, vermöge deren die Elemente des einen involutorisch gepaart sind und die Elementenpaare desselben den Elementen des andern projectivisch entsprechen 15

§. 9. Entsprechend gemeinschaftliche Elemente zweier ineinanderliegender projektivischer Reihen, deren eine involutorisch ist . 23

II.

Trilineare und trilinear-symmetrische Verwandtschaft.

§. 10. Definition der trilinearen Verwandtschaft 24
§. 11. Besondere Art der trilinearen Verwandtschaft, welche aus der ein-zweideutigen Verwandtschaft entsteht 27
§. 12. Anzahl der Gruppen zusammengehöriger Elemente, durch welche eine trilineare Verwandtschaft der besonderen Art bestimmt wird 32
§. 13. Definition der trilinear-symmetrischen Verwandtschaft. . 33
§. 14. Möglichkeit der trilinear-symmetrischen Verwandtschaft . 37
§. 15. Die Polarelemente der Elemente eines trilinear-symmetrischen Gebildes 39
§. 16. Singuläre Elemente. Durch die Reihe der ersten Polarelemente und ein Tripel zusammengehöriger Elemente ist eine trilinear-symmetrische Verwandtschaft bestimmt 41
§. 17. Durch drei Tripel zusammengehöriger Elemente ist eine trilinear-symmetrische Verwandtschaft i. A. bestimmt . . 43
§. 18. Ausnahmefall. Cubisch-involutorische Reihen . . . 47
§. 19. Constructionen 50
§. 20. Die Ordnungselemente eines trilinear-symmetrischen Gebildes 55
§. 21. Specialfälle trilinear-symmetrischer Verwandtschaft . . 64
§. 22. Graphische Auflösung der Gleichungen dritten Grades mit einer Unbekannten 67

III.

Das Tripelnetz.

§. 23. Zweite Definition der trilinear-symmetrischen Verwandtschaft als eines Tripelnetzes 69
§. 24. Das Punkttripelnetz einer Curve II. Ordnung und das Strahlentripelnetz einer Curve II. Klasse 74

Die im Folgenden entwickelte Theorie der trilinear-symmetrischen Elementargebilde ist ihrem wesentlichen Inhalte nach identisch mit der algebraischen Theorie der binären cubischen Formen. Abgesehen aber von der rein geometrischen Beweisführung ist auch ihr Ausgangspunkt von dem der algebraischen Theorie verschieden. Diese setzt die cubische Form also auch deren Wurzelpunkte als gegeben voraus, während in den folgenden Entwicklungen die Auffindung dieser Punkte den Schlussstein bildet. Die Arbeit stellt zugleich einen Versuch dar, in die Geometrie der Lage eine neue Verwandtschaft einzuführen und von dieser Nutzen zu ziehen. Vermöge dieser Verwandtschaft sind in drei Elementargebilden je drei Elemente so einander zugeordnet, dass durch zwei derselben allemal das dritte bestimmt ist. Da der analytische Ausdruck der Verwandtschaft für Gebilde einer Dimension eine in jeder von drei Variabeln x, y, z lineare Gleichung ist, so bezeichne ich sie mit dem Namen »trilineare Verwandtschaft«. Einen besonderen Fall dieser Verwandtschaft erhält man auf folgende Weise. Die Elemente eines Elementargebildes α und die Paare einander zugeordneter Elemente eines zweiten involutorischen Gebildes $\varkappa$ lassen sich einander projectivisch zuordnen. Betrachtet man nun den Träger des Gebildes $\varkappa$ als doppelt gelegt und ordnet je zweien durch ein Paar einander zugeordneter Elemente des involutorischen Gebildes $\varkappa$ harmonisch getrennten Elementen des Trägers von $\varkappa$ das dem Paare entsprechende Element von α zu, so sind dies je drei einander zugeordnete Elemente einer zwischen den Elementen des Gebildes α und

des doppelt gelegten Gebildes $\varkappa$ bestehenden trilinearen Verwandtschaft.

Indem ich also von der sogenannten »ein-zweideutigen« Verwandtschaft zweier Elementargebilde α und $\varkappa$ (Vgl. E. Weyr, Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde. Lpz. 1870) ausgehe, gebe ich zunächst eine geometrische Begründung der Hauptsätze dieser Verwandtschaft, definire dann die trilineare Verwandtschaft auf geometrischer Grundlage und zeige, dass in der oben angegebenen Art die ein-zweideutige Verwandtschaft in erweiterter Auffassung als specieller Fall einer trilinearen Verwandtschaft sich darstellen lässt. — Man kann nun den Gebilden α und $\varkappa$ den nämlichen Träger geben. Dann sind durch je zwei beliebige Elemente des Trägers drei andere desselben bestimmt, welche mit jenen drei Gruppen von je drei zusammengehörigen Elementen der trilinearen Verwandtschaft, welche zwischen den Elementen des Trägers besteht, bilden. Analog nun wie bei zwei ineinanderliegenden projectivischen Elementar-Gebilden die beiden Elemente, die i. A. einem beliebigen Elemente des gemeinsamen Trägers entsprechen, im besonderen Falle zusammenfallen können, so können in der trilinearen Verwandtschaft, die zwischen den Elementen des Trägers der Gebilde α und $\varkappa$ besteht, die drei i. A. zu zwei beliebigen Elementen desselben gehörenden Elemente in eines zusammenfallen. Dann besteht zwischen den Elementen des Trägers eine Verwandtschaft, die »trilinear-symmetrische«, vermöge deren die Elemente des Trägers in Tripel geordnet sind von der Art, dass je zwei Elemente eines Tripels das dritte bestimmen. Analytisch wird diese Verwandtschaft durch eine in x, y, z lineare und symmetrische Gleichung gegeben. Die sämmtlichen Tripel zusammengehöriger Elemente der Verwandtschaft bilden eine lineare Mannigfaltigkeit zweiter Stufe oder ein Netz von Tripeln. Als solches lässt sich die Verwandtschaft mittelst eines Satzes aus der Theorie der Curven II. Ordnung auch direct definiren, wie man im dritten Abschnitt der Arbeit ausgeführt finden wird. In dieser Auffassung ist der analytische

Ausdruck der Verwandtschaft eine binäre cubische Form gleich Null gesetzt, deren Coefficienten von zwei Parametern linear abhängen. In dem Netze giebt es drei Tripel von je drei zusammenfallenden Elementen, die »Ordnungselemente« der trilinear-symmetrischen Verwandtschaft. Nimmt man diese zu Wurzelpunkten einer binären cubischen Form, so ist mit Polarentheorie der letzteren diejenige des Tripelnetzes, wie schon oben angedeutet, in der Hauptsache identisch (Vergl. Salmon, »Geometrie der Kegelschnitte.« Deutsch von Fiedler. 3. Aufl. p. 432. — Clebsch, »Theorie der binären algebraischen Formen«. p. 114. — Lindemann, »Vorlesungen über Geometrie von Alfred Clebsch.« p. 218.)

Die Theorie des Tripelnetzes führt naturgemäss auf die Untersuchung sämmtlicher dreifach unendlich vieler in einem Elementargebilde enthaltenen Tripel von Elementen. Diese Untersuchung behalte ich mir für später vor.

Im Folgenden mache ich von der entwickelten Theorie noch zwei Anwendungen. Die eine (§. 22) ist eine Methode der graphischen Auflösung der Gleichungen dritten Grades mit einer Unbekannten, eine Methode, welche sich als Verallgemeinerung einer von Chasles angegebenen erweist. Die zweite Anwendung bezieht sich auf die Theorie eines Netzes von Kegelschnitten mit einem gemeinschaftlichen Punkt. Je zwei Kegelschnitte schneiden sich ausser in dem allen gemeinsamen Punkte in den Eckpunkten eines Dreiecks. Alle diese Dreiecke sind, wie bekannt, einer und derselben Curve II. Classe umschrieben und bilden ein Netz von Strahlentripeln, dessen Träger die Curve II. Classe ist. Mit der Theorie dieses Netzes kommt daher diejenige eines Netzes von Kegelschnitten mit einem gemeinschaftlichen Punkte überein.

Von Arbeiten, die den Gegenstand der nachfolgenden Untersuchungen mit den Methoden der Geometrie der Lage behandeln, ist mir nur eine bekannt. In einer Abhandlung »Die Polaren der ebenen Curven dritter Ordnung mit Doppelpunkten« leitet Herr Milinowski die Eigenschaften der harmonischen

Mittelpunkte eines Systems von drei Punkten einer Geraden aus einigen Eigenschaften des ebenen Dreiecks ab (»Programm«. Tilsit. 1872). Der im Folgenden eingeschlagene Weg scheint mir aber der einfachere und fruchtbringendere zu sein. Was die geometrische Ableitung der Fundamentalsätze der einzweideutigen Verwandtschaft betrifft, so ist die im ersten Abschnitt gegebene eine selbstständige. Herr Weyr stützt sich in seinem oben genannten Werke auf analytische Sätze. Neuerdings hat derselbe einen Aufsatz »Ueber Involutionen n-ten Grades und k-ter Stufe« (»Sitzungsberichte der Wiener Akademie«. April 1879) veröffentlicht. Nach der Terminologie desselben wäre ein Tripelnetz als eine Involution dritten Grades und zweiter Stufe zu bezeichnen.

Von ähnlicher Bedeutung wie die quadratische Involution für die Theorie der Kegelschnitte ist die Untersuchung der Mannigfaltigkeiten von Punkttripeln einer Geraden für eine geometrische Theorie der ebenen Curven III. Ordnung, und insofern kann das Folgende als eine Vorarbeit für diese Theorie gelten.

I.

Projectivische Beziehung eines Elementargebildes auf die Reihe der Elementenpaare eines zweiten involutorischen Elementargebildes.

§. 1.

Es sei $\varkappa$ eine involutorische Curve II. Ordnung, (Fig. 1) P ihr Involutionscentrum, p ihre Involutionsaxe. Wir ordnen jedem Paare einander zugeordneter Punkte A und A_1 der Curve den Strahl des Strahlenbüschels P zu, der die Punkte A und A_1 verbindet. Sind die Ordnungspunkte der involutorischen Curve imaginär, so ist dann auch umgekehrt jedem Strahl des Büschels P ein Paar einander zugeordneter Punkte der Curve zugeordnet. Sind die Ordnungspunkte aber reell, so giebt es Strahlen von P, denen zunächst keine Punktpaare der Curve zugeordnet sind. Gleichzeitig kann man dem Punktpaare AA_1 den Pol A_0 der Geraden $\overline{AA_1}$ bezüglich der Curve $\varkappa$ zuordnen. Es ist dann auch umgekehrt jedem Punkte von p ein Punktpaar der involutorischen Curve $\varkappa$ zugeordnet, wenn deren Ordnungselemente imaginär sind; im andern Falle giebt es Punkte von p, denen zunächst keine Punktpaare von $\varkappa$ zugeordnet sind.

Man kann nun irgend zwei einander zugeordnete Punkte A und A_1 der involutorischen Curve $\varkappa$ wieder als Ordnungselemente einer auf der Curve $\varkappa$ liegenden involutorischen Punktreihe ansehen. Das Involutionscentrum der letzteren ist der auf p liegende Pol A_0 der Geraden $\overline{AA_1}$ bezüglich der Curve $\varkappa$. Auf diese Weise werden die Punktpaare der gegebenen involutorischen Punktreihe ersetzt durch eine Reihe solcher involutorischen Punktreihen, deren Involutionscentren auf der Involutionsaxe p der gegebenen Reihe liegen. Hat nun die gegebene Reihe imaginäre Ordnungselemente, so vertritt auch umgekehrt jede involutorische Punktreihe auf $\varkappa$, deren Involutionscentrum auf p liegt, zwei einander zugeordnete Punkte der gegebenen involutorischen Reihe; denn die Ordnungselemente

jeder solchen Reihe sind reell und bilden ein Punktpaar der gegebenen Reihe. Sind aber die Ordnungselemente der letzteren reell, so sind die Ordnungselemente derjenigen involutorischen Punktreihen, deren Involutionscentren im Innern von $\varkappa$ liegende Punkte von p sind, imaginär und vertreten daher keine reellen Punktpaare der gegebenen Reihe. Man kann nun aber festsetzen, dass jede involutorische Punktreihe, deren Involutionscentrum U ein im Innern von $\varkappa$ liegender Punkt von p ist, ein Paar imaginärer einander zugeordneter Punkte $U_1\ U_2$ der gegebenen involutorischen Punktreihe vertreten soll. Indem man so den Paaren reeller einander zugeordneter Punkte einer involutorischen Punktreihe II. Ordnung mit reellen Ordnungselementen Paare imaginärer einander zugeordneter Punkte hinzufügt, gilt der Satz ohne Ausnahme:

Ordnet man jedem Paare einander zugeordneter Punkte einer involutorischen Curve II. Ordnung $\varkappa$ den Pol der Verbindungslinie des Paares bezüglich der Curve zu, so ist die Reihe der Paare einander zugeordneter Punkte der Curve auf die Involutionsaxe p der letzteren so bezogen, dass jedem Punktpaare $U_1\ U_2$ ein Punkt U von p und umgekehrt entspricht.

Der Punkt U ist das Involutionscentrum einer involutorischen Punktreihe auf $\varkappa$, durch welche das Punktpaar $U_1\ U_2$ vertreten werden kann.

Gleichzeitig ist jedem Paare einander zugeordneter Punkte von $\varkappa$ ein Strahl des Büschels P zugeordnet, wo P das Involutionscentrum der involutorischen Curve $\varkappa$ ist. Der Strahl verbindet das Punktpaar und ist die Involutionsaxe derjenigen involutorischen Punktreihe, durch welche das Punktpaar vertreten werden kann.

Die Aussage des letzten Absatzes gilt auch für imaginäre Punktpaare $U_1\ U_2$. Denn wenn ein solches auf $\varkappa$ durch eine involutorische Punktreihe mit imaginären Ordnungselementen dargestellt wird, deren Involutionsaxe u und deren Involutionscentrum U ist, so kann es nach v. Staudt (»Beiträge zur

Geometrie der Lage« p. 115) auch dargestellt werden durch die auf u liegende involutorische Reihe der bezüglich $\varkappa$ conjugirten Punkte, und es kann somit u als die Verbindungslinie der Punkte U_1 und U_2 betrachtet werden.

§. 2.

Sind A und A_1 zwei einander zugeordnete Punkte (Fig. 1) der involutorischen Curve $\varkappa$, A_0 der Pol ihrer Verbindungslinie bezüglich $\varkappa$ und O und O' zwei mit A_0 in gerader Linie liegende Punkte von $\varkappa$, so sind O und O' zwei einander zugeordnete Punkte derjenigen involutorischen Punktreihe auf $\varkappa$, durch welche die Punkte A und A_1 vertreten werden können. Giebt man den Punkt O, so ist durch das Punktpaar AA_1 der Punkt O' und umgekehrt durch den Punkt O' das Punktpaar AA_1 eindeutig bestimmt. Denn im ersten Falle ist O' der zweite Schnittpunkt der Geraden $\overline{A_0 O}$ mit der Curve $\varkappa$, im zweiten Fall erhält man den Punkt A_0 als Schnittpunkt der Geraden p und $\overline{O O'}$, wodurch auch das Punktpaar AA_1 bestimmt ist. Nimmt man also auf der involutorischen Curve $\varkappa$ einen Punkt O beliebig aber fest an und bestimmt den zu O zugeordneten Punkt O' derjenigen involutorischen Punktreihe, durch welche ein Punktpaar AA_1 der gegebenen involutorischen Reihe vertreten wird, so beschreibt der Punkt O' gleichzeitig mit dem Punktpaar AA_1 die Curve $\varkappa$, und die beiden von dem Punkt O' und dem Punktpaar AA_1 beschriebenen Reihen sind so auf einander bezogen, dass jeder Lage von O' eine Lage des Punktpaars AA_1 und umgekehrt entspricht.

Sind die Punkte A und A_1 reell, so sind die Punkte O und O' harmonisch durch sie getrennt. Sind A und A_1 dagegen conjugirt-imaginär, so hat die gegebene involutorische Punktreihe auf $\varkappa$ zwei reelle Ordnungspunkte S und T, die Schnittpunkte der Curve $\varkappa$ mit der Geraden p. S und T sind zwei einander zugeordnete Punkte in jeder involutorischen Punktreihe, durch welche ein Punktpaar der gegebenen involutorischen

Reihe vertreten wird. Durch S und T als ein Paar, O und O' als ein zweites Paar einander zugeordneter Punkte ist die involutorische Punktreihe, durch welche das Punktpaar $A A_1$ vertreten werden kann, vollkommen bestimmt. Wir wollen nun auch in dem Falle, dass A und A_1 conjugirt-imaginär sind, sagen, dass jedes Punktpaar der sie vertretenden involutorischen Punktreihe durch A und A_1 harmonisch getrennt ist. (Vergl. v. Staudt. »Beiträge« p. 92). Dann lässt sich das oben erhaltene Resultat folgendermassen aussprechen:

> Nimmt man auf einer involutorischen Curve II. Ordnung $\varkappa$ einen Punkt O beliebig aber fest an und bestimmt die zum Punkt O harmonischen Punkte O' bezüglich der Paare einander zugeordneter Punkte der Curve, so gehört zu jedem Punkt von $\varkappa$ eines dieser Punktpaare und umgekehrt.

Gehört zum Punktpaar $A A_1$ der involutorischen Curve $\varkappa$ auf der Involutionsaxe p der Punkt A_0 (§. 1), d. h. ist A_0 der Pol der Geraden $\overline{A A_1}$ bezüglich der Curve, und gehört zu demselben Punktpaar auf der Curve selbst, wenn man den festen Punkt O zu Grunde legt, der Punkt O', d. h. sind O und O' durch A und A_1 harmonisch getrennt, so liegen A_0, O und O' in gerader Linie. Daraus folgt, dass, wenn das Punktpaar $A A_1$ die Curve $\varkappa$ beschreibt, die Punkte A_0 und O' zwei projectivische Punktreihen auf p und $\varkappa$ beschreiben. Legt man statt O einen andern Punkt O_1 als festen Punkt zu Grunde und ist dann O'' der durch A und A_1 von O_1 harmonisch getrennte Punkt, so beschreiben, wenn das Punktpaar AA_1 die Curve durchläuft, auch die Punkte A_0 von p und O'' von $\varkappa$ zwei projectivische Punktreihen, also sind auch O' und O'' homologe Punkte zweier auf $\varkappa$ liegenden projectivischen Punktreihen.

Nennt man den Punkt O', der durch die Punkte A und A_1 vom Punkt O harmonisch getrennt ist, den Pol des Punkts O bezüglich des Punktpaars AA_1, so ist in dem Obigen der folgende Satz enthalten:

Die Pole zweier Punkte einer involutorischen Curve II. Ordnung bezüglich der einzelnen Paare einander zugeordneter Punkte derselben sind homologe Punkte zweier projectivischen Punktreihen (Vergl. Cremona, »Ebene Curven.« Deutsche Ausgabe, p. 29).

§. 3.

Der eben bewiesene Satz lässt sich auf alle Elementargebilde, d. h. alle einstufigen Punkt-, Strahlen- und Ebenengebilde I. u. II. Ordnung (v. Staudt, »Beiträge« p. 2. — Reye, »Geometrie der Lage« II. Aufl. I. Abth. p. 102) ausdehnen. Ist nämlich ein gegebenes involutorisches Elementargebilde ein Strahlengebilde, so lässt sich eine involutorische Curve II. Ordnung $\varkappa$ construiren, welche zu dem Strahlengebilde perspectivisch liegt. Ist es ein Punkt- oder ein Ebenengebilde, so lässt sich ein involutorisches Strahlengebilde construiren, so dass das letztere gleichzeitig zu dem Punkt- oder Ebenengebilde und zu der Curve perspectivisch liegt.

Das gegebene involutorische Gebilde sei nun ein (Fig. 1) Strahlengebilde, z. B. ein involutorischer Strahlenbüschel I. Ordnung X. Legt man durch seinen Mittelpunkt eine Curve II. Ordnung $\varkappa$, so erhält man auf ihr als Schnitt mit dem Büschel eine involutorische Punktreihe II. Ordnung. Sind O und O' durch ein Paar einander zugeordneter Punkte A und A_1 der Curve harmonisch getrennt, so sind die durch O und O' gehenden Strahlen o und o' des Büschels X durch das Paar einander zugeordneter Strahlen a und a_1 desselben, das durch die Punkte A und A_1 geht, harmonisch getrennt. Ebenso sind die Strahlen o_1 und o'' durch a und a_1 harmonisch getrennt, wenn sie durch die Punkte O_1 und O'' gehen und diese durch A und A_1 harmonisch getrennt sind. Nun sind O' und O'' homologe Punkte zweier projectivischen Reihen, also auch o' und o'' homologe Strahlen zweier projectivischen ineinanderliegenden Strahlenbüschel.

Analoges gilt für jedes zur Curve $\varkappa$ perspectivisch liegende involutorische Strahlengebilde, dann aber auch für jedes zu einem solchen Strahlengebilde perspectivisch liegende involutorische Punkt- oder Ebenengebilde und damit für Elementargebilde überhaupt.

Nennt man dasjenige Element o' eines Elementargebildes, welches durch die Elemente a und a_1 desselben von dem Element o harmonisch getrennt ist, das »Polarelement« des Elements o bezüglich des Elementenpaars $a\,a_1$, so kann man nunmehr allgemein den Satz aussprechen:

> Die Polarelemente zweier Elemente eines involutorischen Elementargebildes bezüglich der einzelnen Paare einander zugeordneter Elemente desselben sind homologe Elemente zweier projectivischen Reihen.

Hierbei ist noch zu bemerken, dass jedes involutorische Elementargebilde, welches reelle Ordnungselemente S und T hat, ausser den Paaren reeller Elemente auch Paare imaginärer Elemente enthalten soll. Ein solches Paar wird vertreten durch eine involutorische Elementenreihe des Gebildes, von welcher S und T ein Paar, zwei durch S und T getrennte Elemente O und O' ein zweites Paar einander zugeordneter Elemente bilden. Man erhält alle imaginären Elementenpaare der gegebenen involutorischen Reihe, wenn man das Element O festhält und O' sämmtliche Lagen in demjenigen von S und T begrenzten Raume des Gebildes einnehmen lässt, welcher O nicht enthält. — Ferner, wenn A und A_1 zwei imaginäre einander zugeordnete Elemente des Gebildes sind, so soll jedes Paar der sie vertretenden involutorischen Reihe durch $A\,A_1$ harmonisch getrennt heissen. —

§. 4.

Wenn die Elemente eines Gebildes im Gegensatz zu den paarweise einander zugeordneten eines involutorischen Gebildes einzeln betrachtet werden, so soll das Gebilde ein »gewöhnliches« heissen.

Auf Grund des im vorigen Paragraphen aufgestellten Satzes kann man nun folgende Definitionen geben:

Vier Paare einander zugeordneter Elemente eines involutorischen Elementargebildes heissen harmonisch, wenn die Polarelemente eines und daher jedes Elements des Gebildes bezüglich der vier Paare vier harmonische Elemente sind.

Ferner:

Ein Elementargebilde heisst zu der Reihe der Paare einander zugeordneter Elemente eines zweiten involutorischen Elementargebildes projectivisch, wenn die Gebilde so aufeinander bezogen sind, dass je vier harmonischen Elementen des ersteren je vier harmonische Elementenpaare des letzteren entsprechen.

Es entsprechen dann auch je vier harmonischen Elementenpaaren des involutorischen Gebildes je vier harmonische Elemente des andern. Aus der letzten Definition folgt:

Die Polarelemente eines beliebigen festen Elements eines involutorischen Elementargebildes bezüglich der einzelnen Paare einander zugeordneter Elemente desselben entsprechen diesen Paaren projectivisch.

Ferner (§. 2):

Ist P das Involutionscentrum, p die Involutionsaxe einer involutorischen Curve II. Ordnung, so entsprechen die Paare einander zugeordneter Punkte der Curve den Strahlen des Büschels P und den Punkten der Geraden p projectivisch, wenn man jedem Punktpaar seine Verbindungslinie und den Pol derselben bezüglich der Curve zuordnet.

Wir definiren ferner:

Die Reihen der Paare einander zugeordneter Elemente zweier involutorischen Elementargebilde heissen projectivisch, wenn sie so auf einander bezogen sind, dass je vier harmonische Elementenpaare der Gebilde einander entsprechen.

Aus den vorhergehenden Definitionen folgt:

Sind zwei Elementargebilde, von denen das eine oder auch beide gewöhnliche oder involutorische Gebilde sind, so auf einander bezogen, dass ihre Elemente oder Elementenpaare den Elementen oder Elementenpaaren eines dritten gewöhnlichen oder involutorischen Gebildes projectivisch entsprechen, so entsprechen auch die Elemente oder Elementenpaare des einen den Elementen oder Elementenpaaren des andern der beiden ersten Gebilde projectivisch. — Der Satz umfasst sechs Fälle.

§. 5.

Will man die Reihe der Paare einander zugeordneter Elemente eines involutorischen Elementargebildes $\varkappa$ auf ein anderes Elementargebilde α projectivisch beziehen, so kann man zu drei Elementen A, B, C des Gebildes α drei Elemente A_1, B_1, C_1 des involutorischen Gebildes $\varkappa$, von denen aber keine zwei einander zugeordnet sein dürfen, nach Belieben als entsprechende annehmen; dadurch ist jedem Element von α ein Elementenpaar von $\varkappa$ und jedem Element von $\varkappa$ ein Element von α als entsprechendes zugewiesen.

Denn sind A_2, B_2, C_2 die den Elementen A_1, B_1, C_1 von $\varkappa$ zugeordneten Elemente, A', B', C' die Polarelemente eines beliebigen festen Elements O bezüglich der Paare A_1A_2, B_1B_2 C_1C_2, so kann man α auf die Reihe der Polarelemente von O projectivisch so beziehen, dass die Elemente A, B, C und resp. A', B', C' einander entsprechen. Dadurch ist auch α auf die Reihe der Elementenpaare des involutorischen Gebildes $\varkappa$ projectivisch bezogen. (§. 4.)

Um zu einem Element X von α das entsprechende Paar von $\varkappa$ zu finden, wird man hiernach ein Element O' von $\varkappa$ so bestimmen, dass

$$\varkappa(A', B', C', O') \;\pi\; \alpha(A, B, C, X) \text{ ist,}$$

und das durch O und O' harmonisch getrennte Paar der gegebenen involutorischen Reihe aufsuchen. Und um zu einem

Element X_1 der involutorischen Reihe auf $\varkappa$ das entsprechende Element X von α zu finden, wird man das dem Element X_1 zugeordnete Element X_2 von $\varkappa$ aufsuchen, das Polarelement O' von O bezüglich des Paars $X_1\ X_2$ bestimmen und einen Punkt X so bestimmen, dass

$$\alpha(A,\ B,\ C,\ X)\ \ \pi\ \ \varkappa(A',\ B',\ C',\ O') \text{ ist.}$$

Aus dem Obigen folgt, dass wenn die Reihe der Elementenpaare eines involutorischen Gebildes in zweifacher Weise auf ein anderes Gebilde projectivisch bezogen ist, in beiden Beziehungen aber drei Elementen des involutorischen Gebildes, von denen keine zwei einander zugeordnet sind, die nämlichen drei Elemente des andern Gebildes entsprechen, die beiden Beziehungen identisch sind, d. h. dass dann jedem Elementenpaar des involutorischen Gebildes in beiden Beziehungen ein und dasselbe Element des andern entspricht.

§. 6.

Wenn zwei involutorische Elementargebilde zu einander perspectivisch liegen, d. h. wenn je zwei einander zugeordnete Elemente des einen in je zwei einander zugeordneten Elementen des andern liegen, so sind die Reihen der Elementenpaare der Gebilde zu einander projectivisch. (§. 4.)

Es sei nun $\varkappa$ ein involutorischer Strahlenbüschel (Fig. 2) II. Ordnung, a seine Involutionsaxe, b einer seiner Strahlen. Der Büschel wird von der Geraden b in einer involutorischen Punktreihe geschnitten, deren Punktpaare den Strahlenpaaren des Büschels, also auch den Punkten von a projectivisch entsprechen (§. 4). Da die beiden Punkte von b, die einem Punkte von a entsprechen, auf zwei Strahlen von $\varkappa$ liegen, die in jenem Punkte von a sich schneiden, so entspricht der Schnittpunkt O der Geraden a und b einmal sich selbst, während ihm als einem Punkt von a ausserdem der Berührungspunkt des Strahls b entspricht. Wenn umgekehrt eine Punktreihe I. Ordnung a auf die Reihe der Punktpaare einer anderen involutorischen Punktreihe I. Ordnung b projectivisch so bezogen ist, dass der

gemeinschaftliche Punkt O der Reihen sich selbst entspricht, so wird dem von den Reihen erzeugten Strahlenbüschel, d. i. der Gesammtheit der Verbindungsgeraden entsprechender Punkte jedenfalls der Träger b der involutorischen Punktreihe angehören, denn dem gemeinschaftlichen Punkt O beider Reihen als Punkt der gewöhnlichen Reihe entspricht ausser ihm selbst noch ein zweiter i. A. von O verschiedener Punkt der involutorischen Reihe. Es seien A' und B' zwei Punkte von a, denen die Punktpaare AA_1 und BB_1 von b entsprechen; dann bestimmen die fünf Geraden $\overline{A'A}$, $\overline{A'A_1}$, $\overline{B'B}$, $\overline{B'B_1}$, b einen Strahlenbüschel II. Ordnung $\varkappa$. Die Strahlen desselben sind involutorisch gepaart, wenn man je zwei Strahlen einander zugeordnet, welche sich auf der Geraden a schneiden; a ist dann die Involutionsaxe des involutorischen Büschels $\varkappa$, also projectivisch bezogen auf die Reihe der Strahlenpaare desselben, und daher auch projectivisch zur Reihe der Punktpaare der involutorischen Punktreihe I. Ordnung, in welcher der Büschel $\varkappa$ von dem ihm angehörenden Strahl b geschnitten wird. In dieser projectivischen Beziehung der Geraden a zur Reihe der Punktpaare der involutorischen Geraden b entsprechen den Punkten A' und B' von a die Punktpaare AA_1 und BB_1 von b, während der Schnittpunkt O von a und b sich selbst entspricht. Nun besteht nach Voraussetzung eine projectivische Beziehung zwischen der Geraden a und den Punktpaaren einer auf b liegenden involutorischen Punktreihe. Letztere ist mit der durch den involutorischen Büschel II. Ordnung $\varkappa$ auf b bestimmten identisch, denn in beiden Reihen sind den Punkten A und B die Punkte A_1 und B_1 zugeordnet. In beiden projectivischen Beziehungen der Geraden a zu der Reihe der Punktpaare der involutorischen Punktreihe auf b entsprechen ferner den drei Punkten O, A, B von b, von denen keine zwei einander zugeordnet sind, die Punkte O, A', B' von a. Folglich sind die beiden projectivischen Beziehungen identisch, und es verbindet daher jeder Strahl des involutorischen Büschels II. Ordnung $\varkappa$

zwei einander entsprechende Punkte der gegebenen projectivischen Reihen auf a und b. Wir erhalten somit den Satz:

Eine gewöhnliche und eine involutorische Punktreihe I. Ordnung, welche so auf einander bezogen sind, dass die Punkte der einen den Punktpaaren der anderen projectivisch entsprechen und deren gemeinschaftlicher Punkt sich selbst entspricht, erzeugen einen involutorischen Strahlenbüschel II. Ordnung, welchem der Träger der involutorischen Reihe angehört und dessen Involutionsaxe der Träger der gewöhnlichen Reihe ist.

Ebenso besteht der reciproke Satz der Geometrie der Ebene:

Ein gewöhnlicher und ein involutorischer Strahlenbüschel I. Ordnung, welche so auf einander bezogen sind, dass die Strahlen des einen den Strahlenpaaren des andern projectivisch entsprechen und deren gemeinschaftlicher Strahl sich selbst entspricht, erzeugen eine involutorische Curve II. Ordnung, auf der der Mittelpunkt des involutorischen Büschels liegt und deren Ivolutionscentrum der Mittelpunkt des gewöhnlichen Büschels ist.

Analoge Sätze bestehen für die Geometrie des Strahlenbündels.

§. 7.

Der im vorigen Paragraphen von den projectivischen Reihen auf a und b erzeugte Strahlenbüschel II. Ordnung ist durch vier Strahlen bestimmt, da ihm ausserdem die Gerade b angehört. Wir schliessen hieraus:

Sollen zwei Gerade a und b so aufeinander bezogen werden, dass die Punkte der einen b involutorisch gepaart sind, die Reihe der Paare einander zugeordneter Punkte von b den Punkten von a projectivisch entspricht und der Schnittpunkt den Geraden sich selbst entspricht, so kann man vier Punkten der einen Geraden vier Punkte der anderen nach Belieben als entsprechende zuordnen. Dadurch ist zu jedem Punkt der einen Geraden der ent-

sprechende Punkt resp. das entsprechende Punktpaar der andern bestimmt.

Denn durch die vier Verbindungsgeraden der gegebenen vier Paare entsprechender Punkte von a und b und die Gerade b ist ein Strahlenbüschel II. Ordnung $\varkappa$ bestimmt. Paart man dessen Strahlen involutorisch, indem man a zur Involutionsaxe nimmt, so werden auch die Punkte von b involutorisch gepaart. Die Paare dieser Punkte entsprechen den Punkten von a projectivisch, u. z. entspricht sich der Schnittpunkt von a und b selbst und die vier gegebenen Strahlen des Büschels $\varkappa$ schneiden a und b in vier Paaren einander entsprechender Punkte. Mittelst der vier Paare einander entsprechender Punkte ist es also möglich, zwischen den Geraden a und b eine Beziehung von der im Satz geforderten Art herzustellen.

Diese Beziehung ist aber auch nur auf eine Weise möglich. Denn angenommen, die Gerade a sei noch ein zweites Mal auf die Reihe der Punktpaare einer involutorischen Punktreihe auf b projectivisch so bezogen, dass die vier gegebenen Punkte von a den vier gegebenen von b entsprechen und dass der Schnittpunkt von a und b sich selbst entspricht, so erzeugt auch diese zweite involutorische Punktreihe auf b mit der gewöhnlichen Punktreihe auf a einen involutorischen Strahlenbüschel II. Ordnung. Dieser hat aber mit dem Büschel $\varkappa$ fünf Strahlen gemein, ist also mit $\varkappa$ identisch, und da beide Büschel a zur Involutionsaxe haben, ist auch die involutorische Paarung der Strahlen beide Male die nämliche. Folglich sind auch die beiden involutorischen Punktreihen auf b, da sie zu dem involutorischen Büschel perspectivisch liegen, identisch, und da auch drei Punkten dieser involutorischen Punktreihe beide Male die nämlichen Punkte von a entsprechen, so lässt sich mittelst der gegebenen Bestimmungsstücke zwischen a und b nur auf eine einzige Weise eine Beziehung von der im Satze geforderten Art herstellen.

Wenn die vier gegebenen Punktpaare von a und b zufällig einander projectivisch entsprechen, so gehört auch a dem

von den vier Verbindungslinien der Punktpaare und der Geraden b bestimmten Strahlenbüschel II. Ordnung $\varkappa$ an. Wir erhalten dann einen Grenzfall der im Satze angegebenen Beziehung der Geraden a und b. Die involutorische Punktreihe auf b löst sich auf in eine gewöhnliche Punktreihe und den festen Punkt O, den Schnittpunkt von a und b, so dass jedem Punkt von a dieser Punkt und ein zweiter veränderlicher von b entspricht. Abgesehen vom Punkt O sind a und b in gewöhnlicher Weise projectivisch auf einander bezogen.

Es sei nun A ein Strahlenbüschel I. Ordnung, der auf die Reihe der Strahlenpaare eines zweiten involutorischen Büschels I. Ordnung B projectivisch bezogen ist. Legt man durch den Schnittpunkt O zweier einander entsprechenden Strahlen der Büschel zwei Gerade a und b, bezieht a perspectivisch auf den Büschel A, b perspectivisch auf den Büschel B, so ist a projectivisch zu der Reihe der Punktpaare einer auf b liegenden involutorischen Punktreihe. a und b haben ihren Schnittpunkt O entsprechend gemein, also ist ihre Beziehung durch vier Paare einander entsprechender Punkte bestimmt. Damit ist auch die Beziehung der Büschel A und B bestimmt, zu deren Festlegung also ausser dem durch O gehenden Paare vier Paare einander entsprechender Strahlen hinreichen und nothwendig sind. Also gilt der Satz:

> Ordnet man fünf Strahlen eines Strahlenbüschels I. Ordnung A fünf Strahlen eines zweiten Strahlenbüschels I. Ordnung B nach Belieben zu, so lässt sich zwischen den Büscheln eine Beziehung von der Art herstellen, dass die Strahlen des einen z. B. von B involutorisch gepaart sind und die Strahlenpaare desselben den Strahlen von A projectivisch entsprechen.

In dem Satze, der für Elementargebilde überhaupt gilt, ist noch nicht ausgesprochen, dass die Beziehung nur auf eine einzige Weise möglich ist, wenn fünf Paare einander entsprechender Elemente gegeben sind. Um diesen Nachweis zu liefern, wollen wir den Satz noch auf eine andere Art beweisen.

Bei dem vorigen Beweise wäre es nämlich denkbar, dass die Beziehung der Büschel A und B von der Wahl des Strahlenpaares abhängt, durch dessen Schnittpunkt O die Geraden a und b gelegt wurden.

§. 8.

Die Lösung der folgenden Aufgabe ist bekannt: Es sind fünf Elemente eines Elementargebildes Π gegeben; man nimmt in einer Ebene fünf Punkte beliebig an und sucht einen Punkt der Ebene, aus welchem die fünf Punkte durch Strahlen eines Strahlenbüschels I. Ordnung projicirt werden, welche den fünf gegebenen Elementen des Gebildes Π projectivisch entsprechen.

Für unsern Zweck genügt es anzunehmen, dass keine drei der fünf Punkte in gerader Linie liegen.

Es giebt i. A. einen einzigen Punkt, der der Aufgabe Genüge leistet. Sind nämlich $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ die fünf Elemente von Π, A, B, C, D, E die fünf angenommenen Punkte, so projicire man die Punkte B, C, D, E aus dem Punkte A und bestimme zwei Strahlen t und t' des Büschels A I. Ordnung so, dass

$$A(t, B, C, D) \;\pi\; \Pi(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$$
$$\text{und } A(t', B, C, E) \;\pi\; \Pi(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon)$$

ist. Construirt man sodann zwei Kegelschnitte, welche durch A, B, C gehen und von denen der eine ausserdem durch D geht und in A von t berührt wird, der andere durch E geht und in A von t' berührt wird, so haben diese Kegelschnitte noch einen vierten Punkt P gemein, welcher der Aufgabe Genüge leistet. Denn es ist

$$A(t, B, C, D) \;\pi\; P(A, B, C, D)$$
$$\pi\; \Pi(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$$
$$A(t', B, C, E) \;\pi\; P(A, B, C, E)$$
$$\pi\; \Pi(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon);$$

folglich auch $P(A, B, C, D, E) \;\pi\; \Pi(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$.

Der Punkt P lässt sich mittelst des Lineals allein construiren. (Vergl. Cremona, »Ebene Curven«. Deutsche Ausgabe. p. 88.

Durège, »Ebene Curven III. Ordnung.« p. 83. — v. Staudt, »Geometrie der Lage.« p. 148.)

Es giebt aber i. A. auch nur einen solchen Punkt P. Denn wenn auch der Punkt P' die Aufgabe löste, so wäre

$$P\,(A,\ B,\ C,\ D,\ E)\ \pi\ P'\,(A,\ B,\ C,\ D,\ E).$$

Die projectivischen Büschel P und P' erzeugen eine Curve II. Ordnung $\varkappa$, welche durch die fünf Punkte A, B, C, D, E geht und durch sie bestimmt ist. Es wäre dann

$$\varkappa(A,\ B,\ C,\ D,\ E)\ \pi\ \Pi(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon),\ \text{und}$$

jeder Punkt von $\varkappa$ würde die Aufgabe lösen. Nun sind aber die Punkte A, B, C, D, E beliebig angenommen, daher werden sie als Punkte der durch sie bestimmten Curve II. Ordnung $\varkappa$ i. A. den Elementen α, β, γ, δ, ε von Π projectivisch nicht entsprechen und desshalb wird ein Punkt P' i. A. nicht existiren.

Wir schliessen zugleich aus dem Vorhergehenden: »Hat die gestellte Aufgabe mehr als eine Lösung, so entsprechen die Punkte A, B, C, D, E der durch sie bestimmten Curve II. Ordnung $\varkappa$ den Elementen α, β, γ, δ, ε von Π projectivisch, und jeder Punkt von $\varkappa$ löst die Aufgabe.«

Oder: »Kennt man einen Punkt P, für den $P(A,B,C,D,E)$ π $\Pi(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon)$ ist, ohne dass durch die Forderung, dass dies der Fall sein soll, der Punkt P bestimmt ist, so löst jeder Punkt der durch die Punkte A, B, C, D, E bestimmten Curve II. Ordnung $\varkappa$ die Aufgabe; auf ihr liegt auch P und es ist

$$\varkappa(A,\ B,\ C,\ D,\ E)\ \pi\ \Pi(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon).\text{«}$$

Von dem zu dem letzten reciproken Satz der Geometrie der Ebene werden wir später Anwendung machen. (§. 21).

Wenn vier von den fünf Punkten als Punkte der von den letzteren bestimmten Curve $\varkappa$ und vier der fünf gegebenen Elemente von Π, etwa B, C, D, E und β, γ, δ, ε projectivisch einander entsprechen, ohne dass A und α einander entsprechen, so ist der Punkt A derjenige, welcher die Aufgabe löst. Denn man kann einen Strahl t construiren, so dass

$$A\,(t,\ B,\ C,\ D,\ E)\ \pi\ \Pi(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon)\ \text{ist.}$$

Aus demselben Grunde, wie oben, giebt es aber keinen zweiten Punkt, der die Aufgabe löst.

Nach diesen einleitenden Bemerkungen kommen wir zu unserem eigentlichen Problem.

Es sei $\varkappa$ eine involutorische Curve II. Ordnung, deren Punktpaare den Elementen eines andern Elementargebildes Π projectivisch zugeordnet sind. Dann ist das Gebilde Π auch projectivisch zu dem Strahlenbüschel I. Ordnung, dessen Mittelpunkt P das Involutionscentrum der involutorischen Curve $\varkappa$ ist, u. z. entspricht jedem Element von Π der Verbindungsstrahl der beiden ihm entsprechenden Punkte von $\varkappa$; umgekehrt, wenn einem Element α von Π der Strahl a von P entspricht, so entsprechen ihm auf $\varkappa$ die beiden Schnittpunkte von a und $\varkappa$. Kann man nun den Punkt P und zu jedem Element von Π den entsprechenden Strahl des Büschels P finden, so ist auch zu jedem Element von Π das entsprechende Punktpaar von $\varkappa$ bestimmt. Es ist also die Forderung, einen Strahlenbüschel I. Ordnung P so zu bestimmen, dass seine Strahlen die den Elementen von Π entsprechenden Punktpaare von $\varkappa$ verbinden und den ersteren projectivisch zugeordnet sind. Sind nun A, B, C, D, E fünf Punkte der involutorischen Curve $\varkappa$, denen die Elemente α, β, γ, δ, ε von Π entsprechen, so giebt es i. A. einen einzigen Punkt P, so dass

$$P(A, B, C, D, E) \pi \Pi(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$$

ist. Folglich muss dieser das Involutionscentrum der involutorischen Curve $\varkappa$ sein, denn für dieses findet das projectivische Entsprechen der fünf Strahlen und der fünf Elemente von Π statt. Giebt man also fünf Paare einander entsprechender Elemente von $\varkappa$ und Π, so ist der Punkt P und die projectivische Beziehung der Reihe der Punktpaare von $\varkappa$ zum Gebilde Π i. A. bestimmt.

Im Vorhergehenden ist zunächst vorausgesetzt, dass den fünf Punkten A, B, C, D, E von $\varkappa$ fünf unter einander verschiedene Elemente von Π zugeordnet sind. Die Beziehung

von $\varkappa$ und Π ist aber auch bestimmt, wenn ein oder zwei Mal zwei Punkten von $\varkappa$ ein und dasselbe Element von Π zugeordnet wird.

Denn entspreche zuerst den beiden Punkten A und B von $\varkappa$ das nämliche Element α von Π, und seien ferner C und γ, D und δ, E und ε einander entsprechende Elemente, so müssen A und B zwei einander zugeordnete Punkte der involutorischen Curve $\varkappa$ sein, also liegt das Involutionscentrum (Fig. 3) P derselben auf der Geraden $\overline{AB}$. Projicirt man ferner die Punkte C, D, E aus A, bestimmt einen Strahl t so, dass

$$A(t, C, D, E) \quad \pi \quad \Pi(\alpha, \gamma, \delta, \varepsilon) \text{ ist,}$$

und construirt den Kegelschnitt $\varkappa$, der durch A, C, D, E geht und in A von t berührt wird, so wird dieser von $\overline{AB}$ zum zweiten Male in einem Punkt P geschnitten. Nun ist, da A und B mit P in gerader Linie liegen, sowohl $P(A, C, D, E)$ als auch $P(B, C, D, E) \quad \pi \quad \Pi(\alpha, \gamma, \delta, \varepsilon)$. Nimmt man daher P zum Involutionscentrum einer involutorischen Punktreihe auf $\varkappa$ und bezieht Π projectivisch auf die Reihe der Punktpaare, so dass jedem Element von Π das auf dem entsprechenden Strahl von P liegende Punktpaar zugeordnet ist, so entsprechen den Elementen C, D, E und dem Elementenpaar A, B von $\varkappa$ die resp. Elemente γ, δ, ε, α von Π.

Sollen endlich den Elementenpaaren AB und CD von $\varkappa$ die Elemente α und γ von Π, dem Punkt E von $\varkappa$ das Element ε von Π entsprechen, so ist wiederum die Beziehung von $\varkappa$ und Π vollkommen bestimmt. Denn dann muss der Schnittpunkt der Geraden $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ das Involutionscentrum P der involutorischen Curve $\varkappa$ sein. Bezieht man nun den Strahlenbüschel P projectivisch auf Π, indem man den Strahlen $P(A, C, E)$ die Elemente α, γ, ε von Π zuordnet und weist jedem Element von Π das auf dem entsprechenden Strahl von P liegende Punktpaar von $\varkappa$ zu, so ist Π auf die involutorische Curve $\varkappa$ so bezogen, dass den Elementen α und γ die Punktpaare AB und CD und dem Element ε der Punkt E entspricht.

Wenn man fünf Punkten von $\varkappa$ fünf verschiedene Elemente von Π zuordnet und vier von den fünf Punkten entsprechen den ihnen zugeordneten Elementen von Π projectivisch, so folgt aus dem zu Anfang des Paragraphen Gesagten, dass der fünfte gegebene Punkt das Involutionscentrum P ist; die involutorische Punktreihe auf $\varkappa$ degenerirt also in diesem Falle in eine solche, deren Ordnungspunkte in P zusammenfallen; d. h. sie zerfällt in eine gewöhnliche Punktreihe und den festen Punkt P, welcher als ein Punkt jedes Punktpaars der involutorischen Curve auftritt. — Entsprechen die fünf Punkte von $\varkappa$ den fünf Elementen von Π projectivisch, so wird P ein beliebiger Punkt von $\varkappa$.

Die für die Curve $\varkappa$ gefundenen Resultate übertragen sich auf Elementargebilde überhaupt (§. 3); man kann daher den Satz aussprechen:

> Will man zwei Elementargebilde so aufeinander beziehen, dass die Elemente des einen involutorisch gepaart sind und die Paare einander zugeordneter Elemente desselben den Elementen des andern projectivisch entsprechen, so darf man fünf Elementen des einen fünf beliebige des anderen als entsprechende zuordnen, wodurch dann aber i. A. jedem Element des einen ein Element resp. Elementenpaar des andern als entsprechendes zugeordnet ist.
>
> Man darf auch zwei Mal zwei Elementen desjenigen Gebildes, dessen Elemente involutorisch gepaart werden sollen, je ein und dasselbe Element des andern zuordnen.
>
> Wenn vier von den fünf angenommenen Elementen des einen Gebildes den ihnen zugeordneten des andern projectivisch entsprechen, so ist die involutorische Paarung der Elemente des einen Gebildes eine specielle, indem ein Element jedes Paars einander zugeordneter Elemente mit dem fünften gegebenen Elemente zusammenfällt.

Wenn alle fünf Elemente des einen Gebildes den ihnen zugeordneten des anderen projectivisch entsprechen, so ist die involutorische Paarung der Elemente des einen Gebildes wieder eine specielle, doch so, dass dasjenige feste Element, welches mit jedem andern ein Paar einander zugeordneter Elemente bildet, beliebig gewählt werden kann.

§. 9.

Die Punkte einer Curve II. Ordnung $\varkappa$ seien projectivisch bezogen auf die Reihe der Punktpaare einer gleichfalls auf $\varkappa$ liegenden involutorischen Punktreihe II. Ordnung. Wie viele Punkte haben die beiden Reihen entsprechend gemeinschaftlich?

Es sei P das Involutionscentrum der involutorischen Reihe und O ein beliebiger Punkt von $\varkappa$. Die Strahlenbüschel I. Ordnung P und O sind projectivisch, wenn man je zwei Strahlen einander zuordnet, welche einen Punkt und das ihm entsprechende Punktpaar von $\varkappa$ aus O resp. P projiciren. Die Büschel erzeugen eine Curve II. Ordnung λ, von welcher $\varkappa$ ausser im Punkte O in den drei entsprechend gemeinschaftlichen Punkten der beiden auf $\varkappa$ liegenden projectivischen Reihen geschnitten wird. Der Punkt O ist nur dann ein entsprechend gemeinschaftlicher Punkt der beiden Reihen, wenn die Curven $\varkappa$ und λ einander in O berühren; dann aber haben diese ausser O nur noch zwei Punkte gemeinsam. Daraus folgt:

Zwei ineinanderliegende gleichartige Elementargebilde, deren eines involutorisch ist, und welche so auf einander bezogen sind, dass die Elementenpaare des einen den Elementen des andern projectivisch entsprechen, haben drei Elemente, von denen mindestens eines reell ist, entsprechend gemein.

Sind O und P die Involutionscentren zweier auf einer Curve II. Ordnung $\varkappa$ liegenden involutorischen Punktreihen, deren Punktpaare projectivisch einander zugeordnet sind, so sind auch die Strahlenbüschel O und P projectivisch und erzeugen i. A. eine Curve II. O., von welcher $\varkappa$ in den entsprechend

gemeinschaftlichen Punkten beider Reihen geschnitten wird. Hieraus folgt:

Sind die Reihen der Elementenpaare zweier ineinander liegenden involutorischen Elementargebilde projectivisch auf einander bezogen, so haben sie i. A. vier Elemente entsprechend gemein, welche paarweise auch conjugirt-imaginär sein können.

Diese Sätze lassen die Ordnung derjenigen Punkt-, Ebenen- und Strahlengebilde bestimmen, welche von zwei Gebilden erzeugt werden, deren eines involutorisch ist und dessen Elementenpaare projectivisch den Elementen des anderen entsprechen. Die Theorie dieser Gebilde, wenn ihre erzeugenden Gebilde Grundgebilde erster Stufe sind, hat Herr Weyr in seiner »Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde.« Lpz. 1869. und in der »Geometrie der räumlichen Erzeugnisse ein-zweideutiger Gebilde.« Lpz. 1870. ausgeführt.

II.

Trilineare und trilinear-symmetrische Verwandtschaft.

§. 10.

Die projectivische Beziehung eines Elementargebildes zur Reihe der Elementenpaare eines zweiten involutorischen Elementargebildes lässt sich als besonderer Fall einer anderen allgemeineren Verwandtschaft auffassen. (Fig. 4) Es seien drei Elementargebilde α, β, γ gegeben. Zwei reellen oder conjugirt-imaginären Elementen S und T von β ordne man zwei gleichzeitig mit S und T reelle oder conjugirt-imaginäre Elemente S_1 und T_1 von γ zu; man ordne ferner einem dritten festen Element O von β der Reihe nach jedes Element von γ zu. Auf diese Weise werden einfach unendlich viele projectivische Beziehungen

zwischen den Gebilden β und γ bestimmt. In jeder derselben entsprechen den Elementen S und T von β die Elemente S_1 und T_1 von γ, während das dem Elemente O von β entsprechende Element von γ mit jeder Beziehung wechselt. Nun beziehe man α projectivisch auf γ und ordne jedem Element X von α diejenige projectivische Beziehung der Gebilde β und γ zu, in welcher den Elementen S, T, O von β die Elemente S_1, T_1, X_1 von γ entsprechen, wo X_1 dasjenige Element von γ ist, das in der projectivischen Beziehung der Gebilde α und γ dem Element X von α entspricht. Dann gehört zu jedem Element X von α eine und nur eine projectivische Beziehung der Gebilde β und γ, und umgekehrt gehört jede projectivische Beziehung der Gebilde β und γ, in der den Elementen S und T von β die Elemente S_1 und T_1 von γ entsprechen, zu einem und nur einem Element von α. Denn wenn dem Element O von β in dieser Beziehung das Element X_1 von γ und letzterem in der projectivischen Beziehung der Gebilde α und γ das Element X von α entspricht, so ist die projectivische Beziehung von β und γ dem Element X von α zuzuordnen.

Ich behaupte nun, dass hierdurch zwischen den Gebilden α, β, γ eine Verwandtschaft hergestellt ist, vermöge deren die Elemente der drei Gebilde gruppenweise zu dreien einander zugeordnet sind, so nämlich, dass wenn man zwei Elemente zweier Gebilde beliebig annimmt, durch sie ein Element des dritten Gebildes im Allgemeinen bestimmt ist. Diese drei Elemente bilden dann eine Gruppe, von der je zwei Elemente das dritte bestimmen.

Sind nämlich X und X_1 zwei beliebige Elemente von α und γ, so gehört zu X eine projectivische Beziehung zwischen β und γ, in der dem Element X_1 von γ das Element X_2 von β entsprechen mag. Durch die Elemente X und X_1 von α und γ ist also ein Element X_2 von β bestimmt. Ebenso ist durch die Elemente X und X_2 von α und β ein Element von γ bestimmt, das kein anderes als X_1 ist. Denn dieses Element muss in der zu X gehörigen projectivischen Beziehung zwischen

β und γ dem Element X_2 von β entsprechen, und das ist X_1. Endlich ist durch die Elemente X_1 und X_2 von γ und β ein Element von α bestimmt, das mit X identisch ist. Denn wenn man β und γ projectivisch so aufeinander bezieht, dass den Elementen S, T, X_2 von β die Elemente S_1, T_1, X_1 von γ entsprechen, so gehört diese Beziehung zu einem einzigen Elemente von α. Aber in der zum Element X von α gehörigen Beziehung von β und γ entsprechen einander X_2 und X_1, folglich gehört jene Beziehung von β und γ zu X, und daher gelangt man, auch wenn man von den Elementen X_1 und X_2 ausgeht, wieder zum Element X. Durch je zwei Elemente zweier Gebilde ist also ein Element des dritten i. A. bestimmt, und die drei Elemente bilden eine Gruppe, von der je zwei Elemente das dritte bestimmen. Dies war aber die Behauptung.

Von drei Elementargebilden, welche in dieser Weise auf einander bezogen sind, soll gesagt werden, sie seien »trilinear verwandt« oder »zwischen ihren Elementen bestehe eine trilineare Verwandtschaft«, und je drei Elemente einer Gruppe können »zusammengehörige Elemente« der trilinear-verwandten Gebilde heissen.

Zwischen drei Geraden erhält man z. B. eine trilineare (Fig. 5) Verwandtschaft, wenn man jedem Punkt der einen Geraden diejenige projectivische Beziehung der beiden andern zuordnet, welche durch den Strahlenbüschel I. Ordnung hergestellt wird, dessen Mittelpunkt der Punkt der ersten Geraden ist.

Wenn zwischen drei Gebilden eine trilineare Verwandtschaft besteht, so können zwei oder auch alle drei denselben Träger haben. Wenn zwei derselben, β und γ, denselben Träger haben, so kann ferner der Fall eintreten, dass jede der zwischen β und γ bestehenden projectivischen Beziehungen, die den Elementen von α zugehören, eine involutorische ist, dass also jedem Element von α in einem zweiten Elementargebilde $\varkappa$ (dem Träger von β und γ) eine involutorische Elementenreihe zugehört. Alle diese Elementenreihen müssen ein gemeinschaftliches Paar $S\,T$ einander zugeordneter Elemente besitzen.

Denn es muss unter Festhaltung der früheren Bezeichnungen das Element S_1 von γ mit dem Element T von β, das Element T_1 von γ mit dem Element S von β zusammenfallen; wäre dies nämlich nicht der Fall, oder fielen S_1 und T_1 mit resp. S und T zusammen, so würde durch die Paare einander zugeordneter Elemente S und S_1, T und T_1 oder durch die Ordnungselemente S und T eine involutorische Elementenreihe vollkommen bestimmt sein. Nun sollen aber S und S_1, T und T_1 in jeder zu einem Element von α gehörigen involutorischen Elementenreihe einander zugeordnet sein; alle diese Elementenreihen wären also identisch. Soll dies aber nicht der Fall sein, sollen vielmehr zu zwei Elementen von α verschiedene involutorische Elementenreihen gehören, so bleibt nur noch übrig, dass S mit T_1, also auch S_1 mit T zusammenfällt.

Mit diesem speciellen Fall trilinearer Verwandtschaft werden wir uns nun im Folgenden zu beschäftigen haben.

§. 11.

Wenn in einem Elementargebilde $\varkappa$ eine involutorische (Fig. 6. u. 7) Elementenreihe $\varkappa_1$ gegeben ist, so kann man jedes Paar einander zugeordneter Elemente von $\varkappa_1$ durch diejenige involutorische Elementenreihe ersetzen, deren Ordnungselemente das betrachtete Elementenpaar bilden (§. 1). In jeder dieser involutorischen Reihen sind die Ordnungselemente S und T der gegebenen Reihe $\varkappa_1$ zwei einander zugeordnete Elemente. Ferner kann man jede involutorische Elementenreihe auf $\varkappa$ als aus zwei projectivischen ineinanderliegenden Elementenreihen bestehend ansehen. Thut man dies für sämmtliche involutorische Elementenreihen, deren Ordnungselemente die Elementenpaare der Reihe $\varkappa_1$ sind, so erhält man zwischen den Elementen von $\varkappa$ einfach unendlich viele projectivische Beziehungen. In jeder derselben entsprechen die Elemente S und T einander doppelt, während einem dritten festen Elemente O ein Element X entspricht, das mit der projectivischen Beziehung, die man betrachtet,

wechselt und die Reihe der Polarelemente von O bezüglich der Elementenpaare von $\varkappa_1$ durchläuft. (§. 2).

Ist nun die Reihe der Elementenpaare von $\varkappa_1$ projectivisch bezogen auf ein Elementargebilde α und ersetzt man jedes Elementenpaar von $\varkappa_1$ durch eine involutorische Reihe, so besteht zwischen den Gebilden α und $\varkappa$ eine Beziehung, in welcher zu jedem Element von α eine projectivische Beziehung zwischen den Elementen von $\varkappa$ gehört. In jeder der letzteren entsprechen die Elemente S und T einander doppelt, während dem Element O das mit jeder Beziehung wechselnde Element X entspricht. Wenn in der zum Element A von α gehörigen projectivischen Beziehung dem Element O das Element X entspricht, so ist X das Polarelement von O bezüglich des dem Element A entsprechenden Elementenpaars der ursprünglich gegebenen involutorischen Reihe $\varkappa_1$. Also entsprechen einander A und X in einer zwischen α und $\varkappa$ bestehenden projectivischen Beziehung, denn wenn α projectivisch zur involutorischen Reihe $\varkappa_1$ ist und es ist X das Polarelement eines Elements O bezüglich eines Elementenpaars von $\varkappa_1$, dem das Element A von α entspricht, so beschreiben A und X zwei projectivische Reihen, wenn man O festhält und das Elementenpaar die Reihe $\varkappa_1$ durchlaufen lässt. (§. 4).

Somit besteht zwischen den Gebilden α und $\varkappa$ eine projectivische Beziehung, und jedem Element A von α ist eine projectivische Beziehung zwischen den Elementen von $\varkappa$ zugeordnet, in der die Elemente S und T einander doppelt entsprechen und dem festen Element O dasjenige Element X entspricht, welches in der projectivischen Beziehung zwischen α und $\varkappa$ dem Element A von α entspricht. Daher dürfen wir sagen:

Ist die Reihe der einander zugeordneten Elemente eines involutorischen Elementargebildes $\varkappa$ projectivisch zu einem zweiten Elementargebilde α, so kann man jedes Elementenpaar des involutorischen Gebildes durch diejenige involutorische Elementenreihe ersetzen, deren Ordnungselemente das betrachtete Elementenpaar bilden. Alsdann besteht zwischen

den Elementen von α und $\varkappa$ eine trilineare Verwandtschaft, in der zu jedem Element von α eine involutorische Reihe auf $\varkappa$ gehört und alle zu den Elementen von α gehörenden involutorischen Reihen auf $\varkappa$ ein Paar einander zugeordneter Elemente S und T gemein haben. In zwei Elemente von $\varkappa$ bilden mit einem Elemente von α eine Gruppe von drei zusammengehörigen Elementen; und zwar, wenn A ein Element von α ist, dem das Elementenpaar $A_1 A_2$ der gegebenen involutorischen Reihe auf $\varkappa$ zugeordnet ist, so gehört in der zwischen den Elementen von α und $\varkappa$ bestehenden trilinearen Verwandtschaft zu je zwei durch A_1 und A_2 harmonisch getrennten Elementen von $\varkappa$ das Element A von α.

Umgekehrt gilt auch der Satz:

Wenn von drei trilinear-verwandten Gebilden zwei β und γ denselben Träger $\varkappa$ haben und in jeder zu einem Element des dritten Gebildes α gehörenden projectivischen Beziehung der Gebilde β und γ zwei feste Elemente S und T einander doppelt entsprechen, so kann man die trilineare Verwandtschaft als hervorgegangen betrachten aus der projectivischen Beziehung der Elemente von α auf die Reihe der Elementenpaare derjenigen involutorischen Elementenreihe auf $\varkappa$, deren Ordnungselemente die Elemente S und T sind.

Denn die nach der Definition der trilinearen Verwandtschaft zu einem beliebigen Element von α gehörige projectivische Beziehung von β und γ ist in unserem Falle eine involutorische. Die Ordnungselemente aller dieser projectivisch-involutorischen Beziehungen bilden aber selbst eine involutorische Reihe, da jedes Paar der Ordnungselemente durch S und T harmonisch getrennt ist. Ferner besteht nach Definition zwischen α und γ eine projectivische Beziehung der Art, dass, wenn in dieser die Elemente A und B von α und γ einander entsprechen und O ein festes Element von β ist, O und B einander entsprechen in der zu A gehörigen projectivischen Beziehung zwischen

β und γ. Diese ist in unserem Falle involutorisch; daher sind O und B harmonisch getrennt durch die Ordnungselemente der letzteren Beziehung. Da diese Ordnungselemente selbst ein Paar einer involutorischen Reihe bilden, so beschreibt B, wenn man O festhält, die Reihe der Polarelemente von O bezüglich der Elementenpaare dieser Reihe, d. h. eine zu den Paaren der involutorischen projectivische Reihe, folglich beschreibt auch das Element A von α mit dem Element B eine zu den Paaren der involutorischen projectivische Reihe.

Wenn man das Element A von α festhält, und ein Element B_1 das Gebilde $\varkappa$ durchlaufen lässt, so beschreibt das zu A und B_1 gehörige Element B_2 von $\varkappa$ eine zu der von B_1 beschriebenen projectivische Reihe. Ebenso, wenn man ein Element B_1 von $\varkappa$ festhält und das Element A das Gebilde α durchlaufen lässt, beschreibt das zugehörige Element B_2 von $\varkappa$ eine zu der von A beschriebenen projectivische Reihe, denn B_2 beschreibt die Reihe der Polarelemente von B_1 bezüglich der den Elementen A zugeordneten Elementenpaare der ursprünglich gegebenen involutorischen Reihe auf $\varkappa$. Es gilt also der Satz:

Wenn man die projectivische Beziehung eines Elementargebildes α zu der Reihe der Elementenpaare eines involutorischen Gebildes $\varkappa$ als eine zwischen den Elementen von α und $\varkappa$ bestehende trilineare Verwandtschaft auffasst und man hält ein Element A eines der Gebilde fest, so sind je zwei Elemente, welche mit A eine Gruppe von drei zusammengehörigen Elementen bilden, einander entsprechende Elemente einer projectivischen Beziehung, welche zwischen den Elementen von $\varkappa$ oder denen von $\varkappa$ und α besteht, und welche wir als zum Element A gehörend bezeichnen.

Wir können auch sagen:

Von drei zusammengehörigen Elementen der zwischen den Gebilden α und $\varkappa$ bestehenden trilinearen Verwandtschaft entsprechen einander je zwei in der dem dritten zugehörigen projectivischen Beziehung, welche entweder

zwischen den Elementen von $\varkappa$ oder denen von $\varkappa$ und α besteht.

Von drei zusammengehörigen Elementen von α und $\varkappa$ können auch die beiden auf $\varkappa$ liegenden, etwa B und C, zusammenfallen. Dies Element BC ist dann ein Ordnungselement der dem Element A von α zugehörigen involutorischen Reihe auf $\varkappa$, also ein Element des dem Element A entsprechenden Elementenpaars der ursprünglich gegebenen involutorischen Reihe auf $\varkappa$. Das Element BC mag in der trilinearen Verwandtschaft das dem Element A von α zugehörige Doppelelement von $\varkappa$ heissen.

Diejenige involutorische Reihe, durch welche ein reelles Ordnungselement der ursprünglich gegebenen involutorischen Reihe $\varkappa_1$ auf $\varkappa$ ersetzt werden kann, ist specieller Natur, indem von je zwei einander zugeordneten Punkten derselben der eine mit S zusammenfällt. Wenn daher in der gegebenen projectivischen Beziehung zwischen α und $\varkappa_1$ dem Paar zusammenfallender Elemente S der letzteren Reihe das Element S_1 von α entspricht, so ist das in der zwischen α und $\varkappa$ bestehenden trilinearen Verwandtschaft zu den Elementen S von $\varkappa$ und S_1 von α gehörige Element von $\varkappa$ unbestimmt. Da ferner S und T, die Ordnungselemente von $\varkappa_1$, in allen involutorischen Reihen einander zugeordnet sind, die in der trilinearen Verwandtschaft zu den Elementen von α gehören, so folgt:

Wenn in der projectivischen Beziehung der Reihe der Elementenpaare der auf $\varkappa$ gegebenen involutorischen Reihe $\varkappa_1$ zum Gebilde α den Ordnungselementen S und T von $\varkappa_1$ die Elemente S_1 und T_1 von α entsprechen, so gehört in der zwischen α und $\varkappa$ bestehenden trilinearen Verwandtschaft zu den Elementen S und T von $\varkappa$ ein beliebiges Element von α, zu den Elementen S und S_1 oder T und T_1 von $\varkappa$ und α ein beliebiges Element von $\varkappa$.

§. 12.

Wie viel Gruppen zusammengehöriger Elemente bestimmen eine trilineare Verwandtschaft zweier Gebilde α und $\varkappa$, welche aus der projectivischen Beziehung des einen Gebildes α auf die Reihe der Elementenpaare einer auf dem zweiten liegenden involutorischen Reihe $\varkappa_1$ hervorgeht?

(Fig. 8.) Es sei $\varkappa$ eine Curve II. O. Die den Elementen von α in der trilinearen Verwandtschaft zugehörigen Doppelelementenpaare sollen Paare einer involutorischen Reihe $\varkappa_1$ sein und den Elementen von α projectivisch entsprechen. Es sei p die Involutionsaxe der Reihe $\varkappa_1$, so ist p projectivisch zur Reihe der Paare von $\varkappa_1$, also auch zu α, u. z. entspricht jedem Element A von α derjenige Punkt von p, welcher das Involutionscentrum der in der trilinearen Verwandtschaft von α und $\varkappa$ zu A gehörigen involutorischen Reihe auf $\varkappa$ ist. Ist daher die Gerade p und ihre projectivische Beziehung zu α bestimmt, so ist auch die trilineare Verwandtschaft von α und $\varkappa$ bestimmt, denn die projectivische Beziehung von α und p liefert das Involutionscentrum jeder zu einem Element von α gehörigen involutorischen Punktreihe auf $\varkappa$.

Wenn nun A, B, C, drei zusammengehörige Punkte sind, von denen B und C auf $\varkappa$ liegen, so schneidet die Gerade $\overline{BC}$ die Gerade p in dem Involutionscentrum A_0 der zu A gehörigen involutorischen Punktreihe auf $\varkappa$, also in dem dem Element A von α entsprechenden Punkt A_0 von p. Nun ist die Gerade p i. A. bestimmt, wenn sie von fünf beliebig gegebenen Geraden in fünf Punkten geschnitten werden soll, welche fünf gegebenen Elementen von α projectivisch entsprechen (Vgl. §. 8). Die Gerade p ist also i. A. bestimmt, wenn man fünf Gruppen zusammengehöriger Punkte der zwischen α und $\varkappa$ herzustellenden Verwandtschaft giebt. Also folgt:

> Will man zwischen den Elementen zweier Elementargebilde α und $\varkappa$ eine trilineare Verwandtschaft von der Art herstellen, dass die den Elementen des einen α zuge-

hörigen Doppelelementenpaare des andern $\varkappa$ eine involutorische Reihe $\varkappa_1$ bilden und den Elementen von α projectivisch entsprechen, so darf man fünf Elementenpaaren des Gebildes $\varkappa$ fünf Elemente von α nach Belieben als zugehörige zuordnen, wodurch dann aber zu je zwei Elementen von $\varkappa$ oder $\varkappa$ und α das zugehörige dritte von α oder $\varkappa$ bestimmt ist.

Man zeigt, wie oben (§. 8), dass man zwei Mal zwei Elementenpaaren von $\varkappa$ ein und dasselbe Element von α zuordnen darf. Man kann ferner ein oder mehrere Male einem Element von α ein Doppelelement auf $\varkappa$ zuordnen. Geschieht dies für alle fünf beliebig anzunehmenden Elemente von α, so kommt man wieder zu dem Satze in §. 8.

Wenn $\varkappa$ eine Curve II. Ordnung ist, so bestimmen die in den fünf Gruppen zusammengehöriger Elemente von α und $\varkappa$ auftretenden fünf Punktpaare von $\varkappa$ durch ihre Verbindungslinien i. A. einen Strahlenbüschel II. Ordnung. Es kann vorkommen, dass vier oder sämmtliche fünf jener Strahlen desselben den zu den Punktpaaren von $\varkappa$ gehörigen Elementen von α projectivisch entsprechen. Im ersteren Fall ist der fünfte Strahl, im zweiten Fall ist ein beliebiger Strahl des Büschels die gesuchte Involutionsaxe der involutorischen Reihe $\varkappa_1$ auf $\varkappa$. (§. 8.)

§. 13.

Wenn zwei Elementargebilde α und $\varkappa_1$, deren eines $\varkappa_1$ involutorisch ist und dessen Elementenpaare den Elementen von α projectivisch entsprechen, denselben Träger $\varkappa$ haben, so kann man die Beziehung zwischen α und $\varkappa_1$ als eine zwischen den Elementen des Trägers $\varkappa$ bestehende trilineare Verwandtschaft auffassen. Wenn man dann auf $\varkappa$ zwei Elemente A und B beliebig annimmt, so giebt es drei i. A. unter einander und von A und B verschiedene Elemente, deren jedes mit A und B eine Gruppe zusammengehöriger Elemente der zwischen den Elementen von $\varkappa$ bestehenden trilinearen Ver-

wandtschaft bildet. Denn es sei (Fig. 9) C das Polarelement von B bezüglich des dem Element A von α entsprechenden Elementenpaares der involutorischen Reihe $\varkappa_1$, es sei ferner C_1 das Polarelement von A bezüglich des dem Element B von α entsprechenden Elementenpaares von $\varkappa_1$, es sei endlich C_2 das Element von α, dem dasjenige Elementenpaar von $\varkappa_1$ entspricht, durch welches A und B harmonisch getrennt sind, so sind (§. 11) ABC, ABC_1, ABC_2 je drei zusammengehörige Elemente der zwischen den Elementen von α und $\varkappa_1$, also zwischen denen von $\varkappa$ bestehenden trilinearen Verwandtschaft. Lässt man A und B zusammenfallen, so fallen auch C und C_1 zusammen; zu einem doppelt gezählten Element von $\varkappa$ existiren also zwei andere, welche mit jenem doppelt gezählten eine Gruppe von drei zusammengehörigen Elementen bilden, u. z., wenn A das doppeltgezählte Element ist, so gehört zu ihm erstens sein Polarelement D bezüglich des ihm als einem Element von α entsprechenden Elementenpaars der Reihe $\varkappa_1$ und zweitens dasjenige Element D_2 von α, von dessen entsprechendem Elementenpaare von $\varkappa_1$ das Element A einen Theil bildet.

Zu jedem Element A von $\varkappa$ gehören zwei projectivische Beziehungen von $\varkappa$ auf sich selbst, da man A sowohl zu α als zu $\varkappa_1$ rechnen kann (§. 11). — Ist B ein zweites Element von $\varkappa$ und sind C, C_1 und C_2 die drei zu A und B gehörigen Elemente, so entsprechen einander in der einen zu A gehörigen Beziehung die Elemente B und C doppelt, in der zweiten entsprechen dem Element B, je nachdem man es zu α oder $\varkappa_1$ rechnet, die Elemente C_1 und C_2 von $\varkappa_1$ und α, denn von je drei zusammengehörigen Elementen der zwischen α und $\varkappa_1$ bestehenden trilinearen Verwandtschaft entsprechen je zwei einander in einer dem dritten zugehörigen projectivischen Beziehung der Elemente von $\varkappa_1$ oder von $\varkappa_1$ und α.

Gehören zu dem doppelt gezählten Element A von $\varkappa$ die beiden Elemente D und D_2, so entsprechen einander in der ersten zu A gehörigen projectivischen Beziehung von $\varkappa$ auf

sich selbst die Elemente A und D doppelt, während in der zweiten Beziehung dem Element A die Elemente D und D_2 entsprechen. Also haben die beiden projectivischen Beziehungen von $\varkappa$ auf sich selbst, die zu einem Element A von $\varkappa$ gehören, ein Paar einander entsprechender Punkte, hier A und D, gemeinsam.

Wenn C, C_1, C_2 die drei Elemente von $\varkappa$ sind, die zu den Elementen A und B gehören, so dass B und C durch das dem Element A von α, A und C_1 durch das dem Element B von α, A und B durch das dem Element C_2 von α zugeordnete Elementenpaar der involutorischen Reihe $\varkappa_1$ harmonisch getrennt sind, so kann, wie im folgenden Paragraphen gezeigt werden soll, der Fall eintreten, dass die Elemente C, C_1, C_2 in eines C zusammenfallen. Dann sind also je zwei der (Fig. 10) drei Elemente A, B, C durch das dem dritten als einem Elemente von α zugehörige Elementenpaar von $\varkappa_1$ harmonisch getrennt. Wir wollen sagen, die Elemente A, B, C stehen in dreifacher Zusammengehörigkeit, oder sie entsprechen einander dreifach in der zwischen den Elementen von $\varkappa$ bestehenden trilinearen Verwandtschaft.

Wenn in der zwischen den Elementen eines Gebildes $\varkappa$ bestehenden trilinearen Verwandtschaft, welche hervorgeht aus der projectivischen Beziehung eines Gebildes α auf die Reihe der Elementenpaare eines zweiten involutorischen Gebildes $\varkappa_1$, das mit α denselben Träger $\varkappa$ hat, je drei zusammengehörige Elemente einander dreifach entsprechen, d. h. wenn je zwei von drei zusammengehörigen Elementen durch das dem dritten als einem Element von α zugeordnete Elementenpaar von $\varkappa_1$ harmonisch getrennt sind, so soll die Verwandtschaft, welche zwischen den Elementen von $\varkappa$ besteht, eine »trilinear-symmetrische« und das Gebilde $\varkappa$ selbst ein »trilinear-symmetrisches« heissen.

Die Elemente des Gebildes $\varkappa$ sind dann gruppenweise zu dreien einander so zugeordnet, dass durch je zwei Elemente einer Gruppe alle Mal das dritte bestimmt ist.

Wenn je drei zusammengehörige Elemente der trilinearen Verwandtschaft auf x einander dreifach entsprechen, so werden auch die beiden projectivischen Beziehungen von x auf sich selbst, die zu einem Element A gehören, identisch, also, da die eine Beziehung eine involutorische ist, gehört dann zu A eine involutorische Reihe auf x in doppelter Weise. Sind nämlich A, B, C und A, B', C' zwei Gruppen von drei zusammengehörigen Elementen, die einander dreifach entsprechen und die das Element A gemeinsam haben, so sind B und C, B' und C' einander zugeordnete Elemente der zu A als einem Elemente von α zugehörigen involutorischen Reihe, aus der die erste zu A gehörige projectivische Beziehung besteht. Wegen der Voraussetzung des dreifachen Entsprechens der Elemente A, B, C entsprechen aber auch in der zweiten zu A gehörigen projectivischen Beziehung die Elemente B und C einander doppelt. Dasselbe gilt von B' und C'. Daher fallen die beiden projectivischen Beziehungen zusammen. — Umgekehrt, wenn die beiden zu einem beliebigen Element A gehörigen projectivischen Beziehungen von x auf sich selbst identisch sind, so entsprechen einander je drei zusammengehörige Punkte dreifach. Denn die drei einem Element B in den beiden zu A gehörigen Beziehungen entsprechenden Elemente sind diejenigen, welche mit A und B drei Gruppen von zusammengehörigen Elementen der trilinearen Verwandtschaft auf x bilden. Fallen die beiden Beziehungen zusammen, so fallen die drei dem Element B entsprechenden Elemente in eines C zusammen und daher entsprechen einander A, B, C in der trilinearen Verwandtschaft dreifach. A und B sind aber beliebig gewählte Elemente.

Ist die Verwandtschaft auf x eine trilinear-symmetrische, so fallen auch je zwei Elemente, die zu einem doppelt gezählten Elemente gehören, in eines zusammen.

§. 14.

Es seien nun A, D, E drei zusammengehörige Elemente (Fig. 11) einer zwischen den Elementen eines Gebildes $\varkappa$ bestehenden trilinearen Verwandtschaft, welche einander dreifach entsprechen. Die Verwandtschaft sei hervorgegangen aus der projectivischen Beziehung eines Gebildes α auf die Reihe der Elementenpaare eines zweiten involutorischen Gebildes $\varkappa_1$, das mit α denselben Träger $\varkappa$ hat. Ich behaupte, dass dann je drei zusammengehörige Elemente der trilinearen Verwandtschaft auf $\varkappa$ einander dreifach entsprechen.

Es seien A und C harmonisch getrennt durch das dem Element A von α zugeordnete Elementenpaar von $\varkappa_1$, so entsprechen einander A und C in beiden zu dem Element A von $\varkappa$ gehörigen projectivischen Beziehungen von $\varkappa$ auf sich selbst (§. 13). Ferner entsprechen einander in beiden Beziehungen die Elemente D und E, u. z. doppelt, also sind beide Beziehungen involutorisch, und da sie zwei Paare einander zugeordneter Elemente A und C, D und E gemeinsam haben, so sind sie identisch. Die zu A als einem Element von α zugehörige involutorische Reihe auf $\varkappa$, deren Ordnungselemente das dem Element A zugeordnete Elementenpaar von $\varkappa_1$ bilden, gehört also auch zu A, wenn man A als Element von $\varkappa_1$ betrachtet. Hieraus folgt, dass, wenn D und E zwei beliebige einander zugeordnete Elemente der zu A in doppelter Weise gehörenden involutorischen Elementenreihe auf $\varkappa$ sind, A, D und E in dreifacher Zusammengehörigkeit stehen (§. 13). Hieraus folgt weiter, dass auch zu dem Element D, welches ein ganz beliebiges von $\varkappa$ ist, eine involutorische Reihe auf $\varkappa$ in doppelter Weise gehört. Dann sind F und D harmonisch getrennt durch das dem Element D von α zugeordnete Elementenpaar der Reihe $\varkappa_1$, so entsprechen einander in beiden zu D gehörigen projectivischen Beziehungen von $\varkappa$ auf sich selbst die Elemente F und D; es entsprechen einander ferner in beiden Beziehungen die Elemente A und E doppelt; folglich sind beide involutorisch,

und da sie zwei Paare einander zugeordneter Elemente F und D, A und E gemeinsam haben, sind sie identisch.

Endlich kann man hieraus schliessen, dass irgend drei zusammengehörige Elemente von $\varkappa$ einander dreifach entsprechen. Denn sind X und Y zwei beliebige Elemente von $\varkappa$, so giebt es ein einziges Paar einander zugeordneter Elemente der involutorischen Reihe $\varkappa_1$, durch welches X und Y harmonisch getrennt sind. Sei diesem Paar das Element Z von α zugeordnet, so haben wir eben bewiesen, dass diesem (oben D genannt) die involutorische Reihe, deren Ordnungselemente das dem Element Z entsprechende Elementenpaar von $\varkappa_1$ bilden, in doppelter Weise zugehört. Also stehen auch X, Y, Z in dreifacher Zusammengehörigkeit.

Wir haben also den Satz:

> Die zwischen den Elementen eines Elementargebildes $\varkappa$ bestehende trilineare Verwandtschaft, welche hervorgeht aus der projectivischen Beziehung eines Gebildes α zur Reihe der Elementenpaare eines zweiten involutorischen Gebildes $\varkappa_1$, das mit α denselben Träger $\varkappa$ hat, ist eine trilinear-symmetrische, sobald irgend drei zusammengehörige Elemente, von denen keine zwei zusammenfallen, einander dreifach entsprechen.

Hieraus folgt nun auch die Möglichkeit der trilinear-symmetrischen Verwandtschaft. Man kann nämlich den Satz aussprechen:

> Nimmt man in einem Elementargebilde $\varkappa$ eine involutorische Elementenreihe $\varkappa_1$ an und bezieht die Reihe der Elementenpaare von $\varkappa_1$ projectivisch auf die Elemente von $\varkappa$, indem man jedem von drei beliebig gewählten Elementen von $\varkappa$ dasjenige Elementenpaar von $\varkappa_1$ zuordnet, das durch die beiden anderen Elemente harmonisch von ihm getrennt ist, so besteht zwischen den Elementen von $\varkappa$ eine trilinear-symmetrische Verwandtschaft, wenn man jedes Elementenpaar von $\varkappa_1$ durch diejenige involutorische Reihe ersetzt, deren Ordnungselemente dieses Paar bilden.

In der That ist die projectivische Beziehung von $\varkappa$ zur Reihe der Paare von $\varkappa_1$ gerade bestimmt, wenn man drei Elementen von $\varkappa$ drei Elementenpaare von $\varkappa_1$ zuordnet (§§. 5. 8), und wegen der besonderen Art der Zuordnung entsprechen einander in der trilinearen Verwandtschaft die drei angenommenen Elemente, also je drei zusammengehörige Elemente von $\varkappa$ dreifach.

§. 15.

Die Elemente eines trilinear-symmetrischen Gebildes $\varkappa$ sind in Tripel geordnet, so dass je zwei Elemente eines Tripels das dritte Element desselben bestimmen. Dies Element kann das »gemischte Polarelement« der beiden ersten heissen. Dann gilt der Satz:

Durch zwei Elemente eines trilinear-symmetrischen Gebildes ist ein drittes, ihr gemischtes Polarelement i. A. bestimmt. Ist C das gemischte Polarelement der Elemente A und B, so ist B das gemichte Polarelement von A und C, A das gemischte Polarelement von B und C.

Fallen von drei Elementen eines Tripels zwei in ein Element B zusammen, so heisst das gemischte Polarelement A des Doppelelements B »das zweite Polarelement« des Elements B, während das gemischte Polarelement von A und B, das nach dem vorigen Satze mit B zusammenfällt, ein »erstes Polarelement« von A heist.

Ist also A das zweite Polarelement von B, so ist B ein erstes Polarelement von A. — Und umgekehrt.

Denn wenn B ein erstes Polarelement von A ist, so bilden A, B, B ein Tripel, also ist A auch das zweite Polarelement von B. — Mit Benutzung dieser Bezeichnungen lassen sich die Eigenschaften eines trilinear-symmetrichen Gebildes folgendermassen aussprechen. Die Beweise sind in Früherem enthalten.

Alle Tripel zusammengehöriger Elemente, welche ein Element gemein haben, bestehen aus diesem Element und einer involutorischen Reihe, von der je zwei einander

zugeordnete Elemente das feste Element zum gemischten Polarelement haben. Jedes Element hat zwei erste Polarelemente, die reell oder conjugirt-imaginär sein können; diese sind die Ordnungselemente derjenigen involutorischen Reihe, deren Paare das Element zum gemischten Polarelement haben.

Beschreibt ein Element das Gebilde, so beschreibt das Paar seiner ersten Polarelemente eine zu der von jenem beschriebenen projectivische involutorische Reihe. Jedes Element ist daher ein erstes Polarelement eines und nur eines Elements.

Zu jedem Elemente gehört ein zweites Polarelement. Jedes Element gehört als zweites Polarelement zu zwei Elementen.

Es gilt ferner der Satz:

Je zwei Elemente eines Tripels zusammengehöriger Elemente sind durch die ersten Polarelemente des dritten harmonisch getrennt.

Hieraus folgt:

Je zwei Elemente eines trilinear-symmetrischen Gebildes sind durch die ersten Polarelemente ihres gemischten Polarelements harmonisch getrennt.

Und umgekehrt: Wenn zwei Elemente durch die ersten Polarelemente eines dritten harmonisch getrennt sind, so ist dies ihr gemischtes Polarelement.

Ferner:

Das gemischte Polarelement zweier Elemente ist von jedem derselben durch die ersten Polarelemente des andern harmonisch getrennt.

Lässt man die beiden Elemente zusammenfallen, so folgt noch:

Das zweite Polarelement eines Elements ist von diesem durch die ersten Polarelemente desselben harmonisch getrennt.

(Vergl. Cremona, »Ebene Curven« p. 17 u. ff.).

§. 16.

Sind S und T die Ordnungs-Elemente der involutorischen Reihe, welche von den Paaren der ersten Polarelemente der Elemente eines trilinear-symmetrischen Gebildes gebildet wird, so sind S und T durch die ersten Polarelemente jedes beliebigen Elements A harmonisch getrennt, haben also jedes beliedige Element A zum gemischten Polarelement. Da dann auch T und der beliebige Punkt A durch die ersten Polarelemente von S harmonisch getrennt sein müssen, so folgt, dass diese in T zusammenfallen. Ebenso fallen die ersten Polarelemente von T in S zusammen und endlich fallen auch die zweiten Polarelemente von S und T mit resp. T und S zusammen, wie sich aus dem letzten Satz des vorigen Paragraphen ergiebt. Wir haben also den Satz:

In einem trilinear-symmetrischen Gebilde giebt es zwei Elemente von der Beschaffenheit, dass das zweite und die ersten Polarelemente jedes der beiden Elemente mit dem anderen zusammenfallen. Diese Elemente sind die Ordnungselemente S und T der involutorischen Reihe der ersten Polarelemente der Elemente des Gebildes.

Das gemischte Polarelement der Elemente S und T ist jedes beliebige Element.

Es gilt aber auch umgekehrt der Satz:

Besteht zwischen den Elementen eines Gebildes $\varkappa$ eine trilineare Verwandtschaft, welche hervorgegangen ist aus der projectivischen Beziehung der Elemente von $\varkappa$ auf die Reihe der Elementenpaare einer gleichfalls auf $\varkappa$ liegenden involutorischen Reihe $\varkappa_1$, und sind in dieser Beziehung den Ordnungselementen S und T von $\varkappa_1$ die resp. Elemente T und S von $\varkappa$ zugeordnet, so ist die trilineare Verwandtschaft, welche zwischen den Elementen des Gebildes $\varkappa$ besteht, eine trilinear-symmetrische.

Denn ist A ein beliebiges Element von $\varkappa$, so sind S und T einander zugeordnet in der zu A gehörigen involutorischen

Reihe, deren Ordnungselemente das dem Element A entsprechende Elementenpaar der Reihe $\varkappa_1$ bilden. Zugleich sind S und A in der zu T, T und A in der zu S gehörigen involutorischen Reihe specieller Art einander zugeordnet, also entsprechen A, S und T einander dreifach und die Verwandtschaft zwischen den Elementen von $\varkappa$ ist eine trilinear-symmetrische.

Hieraus kann man schliessen:

Ein trilinear-symmetrisches Gebilde ist bestimmt, wenn von ihm die involutorische Reihe $\varkappa_1$ der ersten Polarelemente seiner Elemente und zu einem Element A eines A_1 seiner ersten oder das zweite Polarelement A_2 gegeben ist.

Denn die Reihe der Elementenpaare von $\varkappa_1$ lässt sich auf ihren Träger $\varkappa$ auf eine einzige Weise projectivisch so beziehen, dass den Elementen A_1, S und T von $\varkappa_1$, wo S und T die Ordnungselemente von $\varkappa_1$ sind, die Elemente A, T und S von $\varkappa$ entsprechen.

Ist das zweite Polarelement A_2 von A gegeben, so ist A ein erstes Polarelement von A_2, also sind wir wieder im vorigen Falle. Der Satz ist nicht davon abhängig, dass S und T reell sind, und ist nur ein besonderer Fall des folgenden allgemeineren:

Ein trilinear-symmetrisches Gebilde ist durch die involutorische Reihe $\varkappa_1$ der ersten Polarelemente seiner Elemente und drei zusammengehörige Elemente A, B, C bestimmt.

In der That kann und muss man den Träger des Gebildes auf die Reihe $\varkappa_1$ projectivisch so beziehen, dass jedem der Elemente A, B, C das durch die beiden anderen harmonisch getrennte Elementenpaar von $\varkappa_1$ entspricht. (§. 14.) Fallen nun zwei der drei Elemente in eines A_1 zusammen, so hat man ein erstes Polarelement eines Elements A. Dann ist auch das andere erste Polarelement A_2 von A bestimmt. Sind nun B, B' zwei durch A_1 und A_2 harmonisch getrennte Elemente, so bestimmen A, B, B' als drei zusammengehörige Elemente mit der Reihe $\varkappa_1$ ein trilinear-symmetrisches Gebilde, in dem A_1 ein erstes Polarelement von A ist. Irgend zwei andere durch A_1 und A_2 harmonisch getrennte Elemente C und C'

bilden mit A ebenfalls ein Tripel zusammengehöriger Elemente der trilinear-symmetrischen Verwandtschaft. Daher ist durch die Reihe $\varkappa_1$ und das erste Polarelement A_1 von A das trilinear-symmetrische Gebilde auch nur auf eine einzige Weise bestimmbar.

§. 17.

Wir wollen untersuchen, durch wie viele Tripel zusammengehöriger Elemente eine trilinear-symmetrische Verwandtschaft zwischen den Elementen eines Elementargebildes $\varkappa$ bestimmt ist.

Die trilineare Verwandtschaft zweier Gebilde α und $\varkappa$, die hervorgeht aus der projectivischen Beziehung des einen α auf die Reihe der Elementenpaare einer auf $\varkappa$ liegenden involutorischen Reihe $\varkappa_1$ ist durch fünf Gruppen zusammengehöriger Elemente, d. h. je zwei Elemente von $\varkappa$ und ein zugehöriges von α i. A. bestimmt (§. 12). Haben α und $\varkappa_1$ denselben Träger $\varkappa$, und soll die zwischen den Elementen von $\varkappa$ durch die Beziehung von α und $\varkappa_1$ entstehende trilineare Verwandtschaft eine symmetrische sein, so genügt es, dass drei Elemente A, B, C auf $\varkappa$ existiren von der Art, dass zu je zweien derselben als Elementen von $\varkappa$ das dritte als Element von α zugehört (§. 14). Solche drei Elemente vertreten also drei Gruppen zusammengehöriger Elemente von α und $\varkappa$. Giebt man daher noch zu zwei Elementenpaaren B_1C_1 und B_2C_2 von $\varkappa$ zwei Elemente A_1 und A_2 von α als zugehörige, so ist die Verwandtschaft bestimmt. Also folgt:

> Durch drei Tripel zusammengehöriger Elemente ist zwischen den Elementen eines Elementargebildes eine trilinear-symmetrische Verwandtschaft i. A. bestimmt.

Wenn $\varkappa$ eine trilinear-symmetrische Curve II. Ordnung, (Fig. 13) p die Involutionsaxe der involutorischen Reihe der ersten Pole ihrer Punkte ist, so schneiden die Seiten $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ eines von drei zusammengehörigen Punkten gebildeten Dreiecks ABC die Gerade p in drei Punkten A_0, B_0, C_0, welche die Involutionscentren der zu den Punkten A, B, C gehörigen involutorischen Reihen auf $\varkappa$ sind; denn die Ordnungselemente

der letzteren sind die ersten Pole der Punkte A, B, C, und und da je zwei der letzteren, z. B. BC durch die ersten Pole des dritten A harmonisch getrennt sind, so muss die Gerade $\overline{BC}$ durch A_0 laufen. Zugleich sind A, B, C und A_0, B_0, C_0 einander entsprechende Punkte zweier projectivischen Reihen, weil sie den ersten Polpaaren von A, B, C projectivisch entsprechen.

Ist nun die trilinear-symmetrische Verwandtschaft auf $\varkappa$ durch drei Gruppen zusammengehöriger Punkte ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ bestimmt, so schneiden die neun Seiten der Dreiecke ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ die Gerade p in neun Punkten, die den ihnen gegenüberliegenden Eckpunkten als Punkten von $\varkappa$ projectivisch entsprechen. Nun ist aber die Gerade p schon durch die Bedingung i. A. bestimmt, dass sie von fünf Geraden in Punkten geschnitten werden soll, die fünf gegebenen Elementen eines Elementargebildes projectivisch entsprechen. Man kann daher von jenen neun Seiten fünf beliebige zur Bestimmung von p benutzen, vorausgesetzt nur, dass alle drei gegebenen Gruppen zusammengehöriger Punkte dabei zur Verwendung kommen. Man kann also alle drei Seiten eines der drei Dreiecke und je eine Seite der beiden andern Dreiecke verwenden. Man kann aber auch je zwei Seiten zweier Dreiecke und eine des dritten verwenden, z. B. indem man festsetzt, dass p von den Geraden $\overline{A_1C_1}$, $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2C_2}$, $\overline{A_2B_2}$, $\overline{BC}$ in fünf Punkten geschnitten werden soll, die den fünf Punkten B_1, C_1, B_2, C_2, A von $\varkappa$ projectivisch entsprechen. Betrachtet man die trilinear-symmetrische Verwandtschaft auf $\varkappa$ als entstanden aus der projectivischen Beziehung eines Gebildes α auf die Reihe der Elementenpaare eines auf demselben Träger $\varkappa$ liegenden involutorischen Gebildes $\varkappa_1$, so gehört dann zwei Mal zu einem Elementenpaar B_1C_1 resp. B_2C_2 von $\varkappa$ ein und dasselbe Element A_1 resp. A_2, während i. A. von den drei Elementen, die zu einem Paar B_1C_1 gehören, keine zwei zusammenfallen. (§. 13) Also hat man den Satz:

Bezieht man die Reihe der Elementenpaare eines involutorischen Gebildes $\varkappa_1$ auf ihren Träger $\varkappa$ projectivisch, so entsteht hieraus eine trilineare Verwandtschaft zwischen den Elementen von $\varkappa$. Kommt es zwei Mal vor, dass von den drei Elementen, die i. A. zu zwei beliebigen Elementen von $\varkappa$ als zugehörige existiren, zwei zusammenfallen, so fällt auch das dritte mit ihnen zusammen, und die Verwandtschaft ist eine trilinear-symmetrische.

Im Vorigen ändert sich nichts Wesentliches, wenn man die Elemente B_1 und C_1, ebenso B_2 und C_2 zusammen fallen lässt, also drei Gruppen zusammengehöriger Elemente giebt, von denen zwei je zwei zusammenfallende Elemente enthalten. Dann geht aber der letzte Satz in den folgenden über:

Fasst man die projectivische Beziehung eines Gebildes α auf die Reihe der Elementenpaare eines mit ihm zusammenliegenden involutorischen Gebildes $\varkappa_1$ als eine zwischen den Elementen ihres gemeinsamen Trägers $\varkappa$ bestehende trilineare Verwandtschaft auf und kommt es zwei Mal vor, dass die beiden einem doppelt gezählten Elemente von $\varkappa$ zugehörigen Elemente (§. 13) zusammenfallen, so ist die Verwandtschaft eine trilinear-symmetrische.

Es fallen dann aber je zwei Elemente, die zu einem doppelt gezählten A_1 von $\varkappa$ gehören, zusammen (§. 13) in eines A'. Es ist dann A' das zweite Polarelement von A_1, also durch die ersten Polarelemente des Elements A_1 von diesem harmonisch getrennt (§. 15). Wenn umgekehrt in der projectivischen Beziehung der zusammenliegenden Gebilde α und $\varkappa_1$ dem Element A' von α das Elementenpaar AA_2 von $\varkappa_1$ und dem Element A_1 von α_1 das durch AA_2 von A' harmonisch getrennt ist, das Element A' von $\varkappa_1$ entspricht, so fallen die beiden zu einem doppelt gezählten Element A_1 gehörigen beiden Elemente der trilinearen Verwandtschaft auf $\varkappa$ in eines A' zusammen, denn diese beiden Elemente sind das Polarelement A' von A_1 bezüglich AA_2 und dasjenige Element von α, dem das Doppelelement A_1 zugehört (§. 13), das ist wieder A'. Daher kann man sagen:

Bezieht man die Reihe der Elementenpaare eines gegebenen involutorischen Elementargebildes $\varkappa_1$ auf ein mit ihm zusammenliegendes Gebilde α projectivisch, so entspricht jedem Element A' des gemeinsamen Trägers $\varkappa$, je nachdem man es zu α oder $\varkappa_1$ rechnet, ein Elementenpaar $A\,A_2$ von $\varkappa_1$ und ein Element A_1 von α. Kommt es zwei Mal vor, dass ein Element A' durch das ihm entsprechende Elementenpaar $A\,A_2$ von dem ausserdem ihm zugehörigen Element A_1 harmonisch getrennt ist, so findet dies für jedes Element von $\varkappa$ statt, und die Beziehung von α und $\varkappa_1$ kann als eine trilinear-symmetrische Verwandtschaft zwischen den Elementen von $\varkappa$ aufgefasst werden.

Nunmehr kann man beweisen, dass der Hauptsatz dieses Paragraphen auch dann gilt, wenn die drei Gruppen, welche eine trilinear-symmetrische Verwandtschaft bestimmen, so beschaffen sind, dass jede ein Doppelelement enthält; d. h. wir wollen beweisen:

Ein trilinear-symmetrisches Gebilde ist bestimmt, wenn drei erste Polarelemente A_1, B_1, C_1 dreier Elemente A, B, C oder die drei zweiten Polarelemente derselben gegeben sind.

Nämlich zwischen den Elementen des Gebildes $\varkappa$ ist eine trilineare Verwandtschaft bestimmt, wenn man den Elementenpaaren A_1A_1, B_1B_1, $A\,A_1$, $B\,B_1$, $C_1\,C_1$ die resp. Elemente A, B, A_1, B_1, C als zugehörige zuordnet. Die Verwandtschaft ist aber symmetrisch, weil zwei Mal einem Doppelelement, nämlich den Elementen A_1 und B_1, ein Element A resp. B doppelt zugehört.

Der letzte Satz gilt auch dann, wenn man die beiden ersten Polarelemente A_1 und A_2 eines Elements A und ein erstes Polarelement B_1 des Elements B giebt. Im Beweise des Satzes ist dann nur das Paar $C_1\,C_1$ durch $A\,A_2$, und das zugehörige Element C durch A_2 zu ersetzen. Allgemeiner folgt aus der Bemerkung am Ende des §. 12, dass drei Gruppen zusammengehöriger Elemente auch dann ein trilinear-symmetrisches Gebilde bestimmen, wenn zwei Gruppen ein Element gemeinsam haben.

Dann darf dies Element aber nicht der dritten Gruppe angehören. Denn wenn die Gruppen ABC und AB_1C_1 das Element A gemeinsam haben, so ist die zu A gehörige involutorische Reihe durch die Paare BC und B_1C_1 bestimmt. Jede dritte Gruppe, die mit jenen beiden das Element A gemeinsam hat, unterliegt also einerseits der Bedingung, dass ihre beiden anderen Elemente einander zugeordnet sind in der zu A gehörigen involutorischen Reihe; wenn andererseits diese Bedingung erfüllt ist, genügen die drei Gruppen nicht zur Bestimmung der trilinearsymmetrischen Verwandtschaft (Vergl. §. 18).

Somit ist der zu Anfang des Paragraphen bewiesene Satz unabhängig davon, dass die Elemente einer Gruppe unter einander oder von denen einer andern sämmtlich vorschieden sind. Der Fall, dass drei Elemente einer Gruppe zusammenfallen, wird unten (§. 20) behandelt.

§. 18.

Drei Tripel zusammengehöriger Punkte ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ bestimmen auf einer Curve II. Ordnung $\varkappa$ eine trilinearsymmetrische Verwandtschaft. Also können zwei Tripel dazu nicht hinreichend sein. Wenn nun p die Involutionsaxe der involutorischen Reihe der ersten Pole der Punkte von $\varkappa$ ist und man greift zwei Gruppen ABC, $A_1B_1C_1$ beliebig heraus, se wird die Gerade p von den Seiten der Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ in Punkten geschnitten, die den ihnen gegenüberliegenden Eckpunkten als Punkten von $\varkappa$ projectivisch entsprechen (§. 17). Da aber p durch die Forderung, dass dies der Fall sein soll, nicht bestimmt ist, weil erst drei Gruppen die Verwandtschaft, also auch die Gerade p bestimmen, so folgt (§. 8), dass irgend fünf der sechs Seiten der Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ mit der Geraden p und folglich alle sechs einem und demselben Strahlenbüschel II. Ordnung angehören und dass als Strahlen desselben die Seiten der Dreiecke den ihnen gegenüberliegenden Eckpunkten als Punkten von $\varkappa$ projectivisch entsprechen.

Dies lässt sich auch direct zeigen. Man weiss, dass zwei Dreiecke, die einem Kegelschnitte eingeschrieben sind, gleichzeitig einem zweiten Kegelschnitt umschrieben sind (Vergl. z. B. Schröter. »Theorie der Kegelschnitte«. I. Aufl. p. 130). Ferner ist bekannt, dass die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass zwei Dreiecke Poldreiecke eines und desselben ebenen Polarsystems sind, die ist, dass sie beide einem und demselben Kegelschnitt eingeschrieben sind (Cremona. »Ebene Curven« p. 160. — Reye. »Geometrie der Lage«. II. Aufl. I. Abth. p. 122). Die Seiten der Dreiecke sind die Polaren der ihnen gegenüberliegenden Eckpunkte und entsprechen ihnen daher projectivisch. — In diesem Falle befinden sich die Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$. Da ferner p von den Seiten in Punkten geschnitten wird, die den jenen gegenüberliegenden Eckpunkten als Punkten von $\varkappa$ projectivisch entsprechen, so schneidet p die sechs Seiten, die einem und demselben Strahlenbüschel II. Ordnung angehören, in Punkten, die diesen Strahlen des Büschels projectivisch entsprechen, folglich liegt p perspectivisch zu dem Büschel und ist also selbst ein Strahl desselben (Reye. »G. d. L.« II. Aufl. I. Abth. p. 109). W. z. b. w. Wir haben daher den Satz:

Die Seiten je zweier Dreiecke, welche von zwei Gruppen zusammengehöriger Punkte einer trilinear-symmetrischen Curve II. Ordnung $\varkappa$ gebildet werden, sind Strahlen eines Strahlenbüschels II. Ordnung, welche den ihnen gegenüberliegenden Eckpunkten als Punkten von $\varkappa$ projectivisch entsprechen. Dem Strahlenbüschel gehört die Involutionsaxe p der involutorischen Reihe der ersten Pole der Punkte von $\varkappa$ an.

Hieraus folgt weiter:

Bestimmen drei Gruppen zusammengehöriger Punkte ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ auf einer Curve II. Ordnung $\varkappa$ eine trilinear-symmetrische Verwandtschaft, so erhält man die Involutionsaxe p der involutorischen Reihe der ersten Pole als vierten gemeinschaftlichen Strahl je zweier der Strahlen-

büschel II. Ordnung, welche von den sechs Seiten je zweier der Dreiecke ABC, $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ bestimmt werden. (Vgl. Schröter, »Theorie der Kegelschnitte«, I. Aufl. p. 245.)

Wenn ein Dreieck einem Kegelschnitt eingeschrieben, einem andern umschrieben ist, so giebt es unendlich viele Dreiecke, die dem einen Kegelschnitt eingeschrieben, dem andern umschrieben sind. Zwei Gruppen zusammengehöriger Punkte der trilinear-symmetrischen Curve $\varkappa$ bestimmen also unendlich viele Gruppen von der Art, dass die Verbindungslinien von je drei Punkten einer dieser Gruppen dem von den Verbindungslinien der je drei Punkte der ersten beiden Gruppen bestimmten Strahlenbüschel II. Ordnung angehören. Durch drei zu diesen gehörige Gruppen ist die Verwandtschaft auf $\varkappa$ nicht bestimmt, denn die Verbindungslinien der Punkte der drei Gruppen gehören einem und demselben Strahlenbüschel II. Ordnung an. Man braucht aber nach dem vorigen Satze zwei Strahlenbüschel II. Ordnung von der Art, wie dieser einer ist, zur Bestimmung der Geraden p und damit der trilinear-symmetrischen Verwandtschaft. Hieraus folgt, dass, wenn drei Punkttripel eine trilinear-symmetrische Verwandtschaft auf der Curve $\varkappa$ bestimmen sollen, es nothwendig aber auch hinreichend ist, dass die Verbindungslinien der Punkte der Tripel nicht einem und demselben Strahlenbüschel II. Ordnung angehören.

Wir können nun folgende Definition aufstellen:

Je drei Eckpunkte eines derjenigen Dreiecke, die einem Kegelschnitt $\varkappa$ eingeschrieben und gleichzeitig einem andern umschrieben sind, bilden eine Gruppe von drei einander zugeordneten Punkten einer auf dem Kegelschnitt $\varkappa$ liegenden »cubisch-involutorischen Punktreihe II. Ordnung«.

Auf Grund dessen lassen sich cubisch-involutorische Elementargebilde folgendermassen definiren:

Sind die Elemente eines Elementargebildes $\varkappa_1$ so in Gruppen zu dreien geordnet, dass, wenn man $\varkappa_1$ projectivisch auf eine Curve II. O. $\varkappa$ bezieht, die den Elementen-

gruppen von $\varkappa_1$ entsprechenden Punktgruppen von $\varkappa$ Gruppen einer cubisch-involutorischen Punktreihe II. Ordnung sind, so sind die Elemente von $\varkappa_1$ »cubisch-involutorisch gruppirt« oder $\varkappa_1$ ist ein »cubisch-involutorisches Gebilde«.

Wo es zur Unterscheidung nöthig ist, sollen die bisher so genannten involutorischen Gebilde als »quadratisch-involutorische« bezeichnet werden.

Das vorher für eine Curve II. Ordnung $\varkappa$ gefundene Resultat kann man nun folgendermassen allgemein aussprechen:

Sollen drei Gruppen zusammengehöriger Elemente eine trilinear-symmetrische Verwandtschaft zwischen den Elementen eines Elementargebildes bestimmen, so ist es nothwendig, aber auch hinreichend, dass sie nicht Gruppen einander zugeordneter Elemente einer und derselben cubisch-involutorischen Elementenreihe sind.

Hiervon ist die zu Ende des vorigen Paragraphen gemachte Bemerkung, dass, wenn drei Gruppen zusammengehöriger Punkte einer trilinear-symmetrischen Curve II. Ordnung $\varkappa$ ein Element A gemeinsam haben, die Verwandtschaft durch diese drei Gruppen nicht bestimmt ist, ein specieller Fall. Denn eine cubisch-involutorische Punktreihe auf $\varkappa$ kann im Speciellen auch aus einer quadratisch-involutorischen Punktreihe und einem festen Element A bestehen. Ist das Involutionscentrum der ersteren der Punkt A_0, so bilden dann je zwei mit A_0 in gerader Linie liegende Punkte von $\varkappa$ und A ein Dreieck, das $\varkappa$ eingeschrieben und einer in zwei Büschel I. Ordnung A und A_0 zerfallenden Curve II. Klasse umschrieben ist, also eine Gruppe einander zugeordneter Punkte einer cubisch-involutorischen Reihe auf $\varkappa$.

§. 19.

Die bei trilinear-symmetrischen Elementargebilden vorkommenden Constructionen können auf solche für eine trilinear-symmetrische Curve II. Ordnung $\varkappa$ zurückgeführt werden (§. 3).

Sind drei Tripel zusammengehöriger Punkte ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ von $\varkappa$ gegeben, so erhält man die Involutionsaxe p der involutorischen Reihe $\varkappa_1$ der ersten Pole der Punkte von $\varkappa$ als vierten gemeinschaftlichen Strahl zweier Strahlenbüschel II. O., welche durch die sechs Seiten je zweier der drei Dreiecke ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ bestimmt werden. Die Construction von p kann mittelst des Lineals allein bewerkstelligt werden (Vergl. Cremona, »Ebene Curven« p. 89. — Durège, »Ebene Curven III. Ordnung« p. 76). — Wenn innerhalb einer Gruppe zwei Punkte zusammenfallen, wenn also ein erster Pol B eines Punktes A gegeben ist, während $A_1B_1C_1$ eine zweite Gruppe zusammengehöriger Punkte bilden, so ist ein Strahlenbüschel II. Ordnung durch die Geraden $\overline{A_1B_1}$, $\overline{B_1C_1}$, $\overline{C_1A_1}$, $\overline{AB}$ und die Tangente b an $\varkappa$ im Punkte B bestimmt. Der Berührungspunkt des Strahls $\overline{AB}$ dieses Büschels ist der Punkt A, da, wenn von dem Dreieck ABC zwei Punkte B und C zusammenfallen, auch zwei Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ zusammenfallen, während ihr Schnittpunkt in den Berührungspunkt übergeht. — Man kann daher p auch dann construiren, wenn drei erste Pole dreier Punkte von $\varkappa$ gegeben sind. Die beiden Strahlenbüschel II. Ordnung, durch welche p bestimmt ist, sind ihrerseits durch je vier Seiten und die Berührungspunkte je zweier derselben gegeben.

Sind zwei Tripel ABC und AB_1C_1 mit einem gemeinschaftlichen Punkt A gegeben, während die Punkte $A_2B_2C_2$ ein drittes Tripel bilden, so vereinfacht sich die Construction von p. Da BC und B_1C_1 Paare einander zugeordneter Punkte der zu A gehörigen involutorischen Reihe sind, so ist der Schnittpunkt der Geraden $\overline{BC}$ und $\overline{B_1C_1}$ das Involutionscentrum dieser Reihe, also ein Punkt von p. Ist ferner A' der gemischte Pol von A und A_2, also der dem Punkte A_2 zugeordnete Punkt in der zu A gehörigen involutorischen Reihe, so ist auch A' der dem Punkt A zugeordnete Punkt in der zu A_2 gehörigen involutorischen Reihe (§. 15); letztere ist durch

die Paare B_2C_2 und AA' bestimmt und deren Verbindungslinien schneiden sich also in einem zweiten Punkt von p.

Ist nun p construirt und sind ABC (Fig. 14) irgend drei zusammengehörige Punkte, so schneiden $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ die Gerade p in den drei Involutionscentren A_0, B_0, C_0 der zu A, B, C gehörigen involutorischen Reihen (§. 17), und es entsprechen einander A, B, C und A_0, B_0, C_0 in derjenigen projectivischen Beziehung, welche zwischen den Punkten von $\varkappa$ und den Involutionscentren der zu ihnen gehörigen involutorischen Reihen besteht. Nun bilden irgend zwei Punkte von $\varkappa$, die mit A_0 in gerader Linie liegen, mit A drei zusammengehörige Punkte. Also folgt:

Projicirt man aus irgend einem Punkt A von $\varkappa$ die zu letzterem gehörige involutorische Reihe durch einen involutorischen Strahlenbüschel, so schneidet ein beliebiger Strahl a des Büschels A die Gerade p in einem Punkte B_0, der das Involutionscentrum derjenigen involutorischen Reihe ist, die zu dem auf dem zugeordneten Strahle a' liegenden von A verschiedenen Punkte B von $\varkappa$ gehört.

Und umgekehrt:

Projicirt man die Gerade p und die Curve $\varkappa$ aus einem Punkt A der letzteren durch einen Strahlenbüschel, so schneiden je zwei Strahlen a und a', welche einen Punkt B von $\varkappa$ und das Involutionsbentrum B_0 der zu ihm gehörigen involutorischen Reihe projiciren, die Curve $\varkappa$ in zwei einander zugeordneten Punkten B und C der zu A gehörigen involutorischen Reihe.

Man kann hieraus noch schliessen:

(Fig. 12.) Sind A_1A_2 zwei einander zugeordnete Elemente eines involutorischen Elementargebildes $\varkappa_1$, sind BB', CC', DD', ... durch A_1A_2 harmonisch getrennte Elemente, und ordnet man den Elementen $B, C, D, \ldots$ $B', C', D', \ldots$ diejenigen Elementenpaare von $\varkappa_1$ zu, welche von einem festen Element A durch die resp. Elemente $B', C', D', \ldots$

$B, C, D \ldots$ harmonisch getrennt sind, so ist diese Zuordnung eine projectivische, und aus ihr geht eine trilinear-symmetrische Verwandtschaft zwischen den Elementen des Trägers $\varkappa$ von $\varkappa_1$ hervor, in der die Reihe $\varkappa_1$ aus den Paaren der ersten Polarelemente von $\varkappa$ besteht, und in der $A_1 A_2$ die ersten Polarelemente von A sind.

In der That, wenn man die Reihe $\varkappa_1$ auf $\varkappa$ projectivisch so bezieht, dass man jedem der drei Elemente A, B, B' von $\varkappa$ dasjenige Paar von $\varkappa_1$ zuordnet, das durch die beiden andern harmonisch getrennt ist, so erhält man auf $\varkappa$ eine trilinear-symmetrische Verwandtschaft (§. 14), in der $\varkappa_1$ die Reihe der ersten Polarelemente und $A_1 A_2$ das Paar der ersten Polarelemente von A bildet. Dann aber bilden CC', $DD' \ldots$ mit A je eine Gruppe zusammengehöriger Punkte, und daher gehört zu C das durch C' und A harmonisch getrennte Paar von $\varkappa$ etc., wie es im Satze ausgesprochen ist.

Ist $\varkappa$ wieder eine trilinear-symmetrische Curve, so kann man zu jedem Punkt von $\varkappa$ das Involutionscentrum der zugehörigen involutorischen Reihe auch auf folgende Weise construiren. (Fig. 14) Ist A_0 das Involutionscentrum der zu A gehörigen involutorischen Punktreihe, F der zweite Schnittpunkt von $\varkappa$ mit der Geraden $\overline{A_0 A}$, also der zweite Pol von A (§. 15), so erhält man zwei projectivische und perspectivisch liegende Strahlenbüschel, wenn man p aus A, $\varkappa$ aus F projicirt, und je zwei Strahlen einander zuordnet, die einen Punkt von $\varkappa$ und das Involutionscentrum der ihm zugehörigen involutorischen Reihe aus F resp. A projiciren. In der That entspricht sich dann der Strahl $\overline{A_0 A F}$ selbst. Sind nun A, B, C drei zusammengehörige Punkte, denen die Punkte A_0, B_0, C_0 auf p entsprechen, welche letzteren also die Schnittpunkte von p mit den Geraden $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ sind, so schneiden sich $\overline{BC}$ und $\overline{AF}$ im Punkte A_0, also schneiden sich gemäss den Eigenschaften des der Curve eingeschriebenen Vierecks $ABCF$ die Paare entsprechender Strahlen $\overline{ACB_0}$ und $\overline{FB}$, $\overline{ABC_0}$ und $\overline{FC}$ auf der Polare a_0 des

Punktes A_0 bezüglich $\varkappa$: letztere, welche die ersten Pole von A verbindet, ist somit der perspectivische Durchschnitt der Büschel A und F.

Ist also F der zweite Pol eines Punkts A einer trilinearsymmetrischen Curve und a_0 die Verbindungslinie der ersten Pole von A, so schneiden zwei Strahlen der Büschel A und F, die durch den nämlichen Punkt von a_0 gehen, die Gerade p (die Involutionsaxe der Reihe der ersten Pole der Punkte von $\varkappa$) und die Curve $\varkappa$ in zwei Punkten, von denen der erste der Pol bezüglich $\varkappa$ der Verbindungslinie der ersten Pole des zweiten ist.

Im Vorhergehenden sind die Lösungen der folgenden Aufgaben enthalten:

I. Die ersten Pole und den zweiten Pol eines Punkts (Fig. 15) X von $\varkappa$ zu construiren.

Wir nehmen die Gerade p und deren Pol P bezüglich $\varkappa$ als gegeben an und betrachten einen Punkt A_0 von p als das Involutionscentrum der zum Punkt A von $\varkappa$ gehörigen involutorischen Reihe.

Man ziehe die Gerade $\overline{A_0 X}$, welche $\varkappa$ zum zweiten Male in X_1 schneidet, ziehe $\overline{A X_1}$, und construire die Polare x_0 des Schnittpunkts X_0 von p und $\overline{A X_1}$ bezüglich $\varkappa$. Sie schneidet $\varkappa$ in den ersten Polen von X.

Oder, wenn F der zweite Schnittpunkt von $\varkappa$ mit $\overline{A_0 A}$ ist, so ziehe man $\overline{FX}$, projicire deren Schnittpunkt G mit der Polare a_0 von A_0 bezüglich $\varkappa$ aus A, so schneidet $\overline{AG}$ die Gerade p im Punkt X_0.

Der zweite Pol von X ist der zweite Durchschnittspunkt X' von $\varkappa$ mit $\overline{X_0 X}$.

II. Gesucht der Punkt X', von dem ein gegebener Punkt X ein erster Pol ist.

Dann ist X' der zweite Pol von X (§. 15) und nach I. zu construiren.

III. Gesucht ein Punkt X_2, von dem ein gegebener Punkt X der zweite Pol ist.

Es ist dann X_2 ein erster Pol von X. Demnach sind die nach I. zu construirenden beiden ersten Pole von X Punkte, welche X zum zweiten Pol haben.

IV. Gesucht der gemischte Pol Z zweier Punkte X und Y (Fig. 16).

Man ziehe $\overline{XY}$, bestimme den Schnittpunkt Z_0 mit p, ziehe $\overline{AZ_0}$, bestimme deren zweiten Schnittpunkt Z mit $\varkappa$, so schneidet $\overline{A_0Z}$ die Curve zum zweiten Male in Z.

Oder: Man ziehe $\overline{A_0X}$ (resp. $\overline{A_0Y}$), bestimme den zweiten Schnittpunkt mit $\varkappa$, verbinde ihn mit A durch eine Gerade und bestimme deren Schnittpunkt X_0 (resp. Y_0) mit p. Dann schneidet $\overline{X_0Y}$ (resp. $\overline{Y_0X}$) $\varkappa$ zum zweiten Male in Z.

Ist die Curve $\varkappa$ fest gezeichnet vorgegeben, so sind alle diese Constructionen mittelst des Lineals allein ausführbar.

§. 20.

Jedes Element eines trilinear-symmetrischen Elementargebildes $\varkappa$, in welchem drei zusammengehörige Elemente vereinigt liegen, soll ein »Ordnungselement« des Gebildes heissen. Von den beiden ersten Polarelementen eines Ordnungselements U fällt das eine und daher auch sein zweites Polarelement mit ihm zusammen, denn ist A_1 ein erstes Polarelement von A, so ist A das zweite Polarelement von A_1. Nun bilden die Paare der ersten Polarelemente der Elemente von $\varkappa$ eine zur Reihe der letzteren projectivische Reihe; die entsprechend gemeinschaftlichen Elemente beider Reihen sind die Ordnungselemente der trilinear-symmetrischen Verwandtschaft auf $\varkappa$. Daraus folgt (§. 9):

Ein trilinear-symmetrisches Elementargebilde $\varkappa$ hat drei Ordnungselemente, von denen zwei conjugirt-imaginär sein können. In jedem derselben fällt ein Element mit einem

seiner ersten und mit seinem zweiten Polarelement zusammen.

(Fig. 17) Es sei $\varkappa$ eine Curve II. Ordnung, p die Involutionsaxe, P das Involutionscentrum der involutorischen Reihe der ersten Pole ihrer Punkte, U der eine stets reelle Ordnungspunkt, U_1 der von U verschiedene erste Pol von U, also der zweite Schnittpunkt von $\varkappa$ mit der Geraden $\overline{PU}$. Projicirt man $\varkappa$ aus U_1 durch einen Strahlenbüschel U_1, so ist dieser projectivisch zum Büschel P, wenn man demjenigen Strahl von U_1, der einen Punkt A von $\varkappa$ projicirt, die Verbindungslinie der ersten Pole von A zuordnet. Die Büschel liegen perspectivisch, weil die einander entsprechenden Strahlen $\overline{U_1U}$ und $\overline{PU}$ zusammenfallen; die Schnittpunkte einander entsprechender Strahlen liegen daher auf einer Geraden q, von welcher $\varkappa$ in ihren beiden anderen Ordnungspunkten V und W geschnitten wird (§. 9). Auf dieser Geraden liegt auch der Schnittpunkt U_0 der Tangenten an $\varkappa$ in U und U_1, denn U_0 als Pol bezüglich $\varkappa$ der Verbindungslinie $\overline{U_1U}$ der ersten Pole von U ist ein Punkt von p und das Involutionscentrum der zu U gehörigen involutorischen Reihe auf $\varkappa$. Das Involutionscentrum der zu U_1 gehörigen Reihe findet man, indem man den zweiten Schnittpunkt von $\overline{U_0U_1}$ und $\varkappa$, also den Punkt U_1 selbst aus U auf p projicirt (§. 19, I). Die Polare des Schnittpunkts von $\overline{UU_1}$ und p bezüglich $\varkappa$ schneidet $\varkappa$ in den ersten Polen von U_1. Nun ist aber $\overline{PU_0}$ diese Polare, da in jenem Punkt sich p und $\overline{UU_1}$ schneiden. Daher entsprechen einander die Strahlen $\overline{PU_0}$ und $\overline{U_1U_0}$ der Büschel P und U_1; somit liegt U_0 auf p, woraus weiter folgt, dass die Schnittpunkte V und W von q und $\varkappa$ durch U und U_1 harmonisch getrennt sind.

Da U ein beliebiger der drei Ordnungspunkte ist, wenn diese sämmtlich reell sind, so folgt:

Jedes der drei Ordnungselemente eines trilinear-symmetrischen Elementargebildes $\varkappa$ ist durch die beiden anderen

von demjenigen Element harmonisch getrennt, welches mit ihm selbst das Paar seiner ersten Polarelemente bildet.

Es sind also die drei Ordnungselemente drei zusammengehörige Elemente, oder (§. 15):

Je zwei der drei Ordnungselemente haben das dritte zum gemischten Polarelement.

Hieraus folgt weiter:

Ein trilinear-symmetrisches Elementargebilde $\varkappa$ ist durch seine drei Ordnungselemente bestimmt. (Vergl. §. 17).

Denn sind U, V, W die Ordnungselemente eines trilinear-symmetrischen Gebildes, U_1, V_1, W_1 die von U, V, W durch resp. VW, WU, UV harmonisch getrennten Elemente von $\varkappa$, so sind UU_1, VV_1, WW_1 die ersten Polarelemente von resp. U, V, W, und als solche Paare einer involutorischen Reihe (§. 15). Da nun U, V, W beliebig angenommen werden können, so folgt hieraus zunächst der Satz:

Sind U, V, W drei Elemente eines Elementargebildes $\varkappa$, U_1, V_1, W_1 die durch VW, WU, UV von resp. U, V, W harmonisch getrennten Elemente von $\varkappa$, so sind UU_1, VV_1, WW_1 drei Elementenpaare in Involution (Vergl. v. Staudt, »Geom. d. L.« p. 121).

Giebt man nun U, V, W als Ordnungselemente eines trilinear-symmetrischen Gebildes $\varkappa$ und construirt die Elemente U_1, V_1, W_1, so kann man $\varkappa$ auf die Reihe der Elementenpaare der involutorischen Reihe, welcher UU_1, VV_1, WW_1 angehören, projectivisch so beziehen, dass den Elementen U, V, W von $\varkappa$ die resp. Paare UU_1, VV_1, WW_1 entsprechen. Dadurch ist zwischen den Elementen von $\varkappa$ eine trilinear-symmetrische Verwandtschaft hergestellt, da je zwei der Elemente U, V, W durch das dem dritten entsprechende Elementenpaar harmonisch getrennt sind (§. 14).

(Fig. 17) Wenn $\varkappa$ eine Curve II. Ordnung ist, so zeigten wir oben, dass die Verbindungslinie q zweier Ordnungspunkte V und W, die Tangente im dritten U an $\varkappa$ und p durch einen

Punkt U_0 laufen. Hieraus folgt nun die Constructionsvorschrift für die Gerade p, wenn U, V, W gegeben sind; es gilt nämlich der Satz:

> Die Schnittpunkte der Tangenten in den Eckpunkten des von den drei Ordnungspunkten einer trilinear-symmetrischen Curve II. Ordnung $\varkappa$ gebildeten Dreiecks mit den gegenüberliegenden Seiten liegen auf der Involutionsaxe p der involutorischen Reihe der ersten Pole von $\varkappa$.

Hieraus kann man von Neuem schliessen, dass die trilinear-symmetrische Verwandtschaft auf $\varkappa$ durch die Ordnungspunkte U, V, W bestimmt ist. Denn construirt man p nach dem vorigen Satze, bezieht $\varkappa$ projectivisch auf diejenige involutorische Reihe $\varkappa_1$ auf $\varkappa$, deren Involutionsaxe p ist, indem man die Punkte U, V, W von $\varkappa$ sich selbst zuordnet, so erhält man eine trilinear-symmetrische Verwandschaft, in der U, V, W die Ordnungselemente sind. Je zwei der Punkte U, V, W sind nämlich durch das dem dritten entsprechende Punktpaar harmonisch getrennt, und U, V, W sind die entsprechend gemeinschaftlichen Punkte der projectivischen Reihen $\varkappa$ und $\varkappa_1$.

Der Satz, dass ein trilinear-symmetrisches Gebilde durch seine drei Ordnungselemente bestimmt ist, gilt auch dann, wenn zwei derselben conjugirt-imaginär sind. Aber der vorige Beweis gilt dann zunächst nicht mehr, denn während im Bisherigen von reellen zusammengehörigen Punkten die Rede war, und namentlich je zwei erste Polarelemente, auch wenn sie conjugirt-imaginär waren, zu einem reellen Elemente gehörten, treten in diesem Falle imaginäre Elemente und ihre ersten imaginären aber nicht conjugirt-imaginären Polarelemente auf. Man müsste also zuvor die früheren Definitionen erweitern, ehe man untersuchen könnte, ob der Beweis des obigen Satzes auch noch für den Fall gilt, dass zwei Ordnungselemente conjugirt-imaginär sind. Wir wollen aber direct zeigen, dass durch drei Elemente eines Elementargebildes $\varkappa$, von denen zwei conjugirt-imaginär sind, sich zwischen den Elementen von $\varkappa$

auf eine einzige Weise eine trilinear-symmetrische Verwandtschaft herstellen lässt, in der jene Elemente die Ordnungselemente sind.

Wir nehmen an, dass U ein reeller, V und W zwei conjugirt-imaginäre Punkte einer Curve II. Ordnung $\varkappa$ sind und zeigen, dass durch diese drei Punkte eine Gerade p sich bestimmen lässt, durch welche, wenn man sie als Involutionsaxe der involutorischen Reihe der ersten Pole der Punkte von $\varkappa$ in einer trilinear-symmetrischen Verwandtschaft auf $\varkappa$ und U als einen Ordnungspunkt giebt, diese Verwandtschaft so bestimmt ist, dass V und W die beiden anderen Ordnungspunkte sind. Letzteres zeigen wir aber dadurch, dass wir beweisen, dass V und W entsprechend gemeinschaftliche Punkte zweier projectivischen Reihen auf $\varkappa$ sind, die man erhält, wenn man jedem Punkte von $\varkappa$ sein erstes Polpaar zuordnet.

(Fig. 18) Wir nehmen an, die conjugirt imaginären Punkte V und W seine auf $\varkappa$ durch eine einstimmig-involutorische Punktreihe gegeben, in der den Punkten U und C die Punkte U_1 und C_1 zugeordnet sind und welche wir durch $\varkappa$ $(UU_1; CC_1)$ bezeichnen. Dann können V und W auch dargestellt werden durch diejenige involutorische Punktreihe, welche auf der Involutionsaxe q der ersteren liegend von den bezüglich $\varkappa$ conjugirten Punktpaaren gebildet wird (v. Staudt. »Beiträge.« p. 115). Es sei Q der Pol von q bezüglich $\varkappa$, also das Involutionscentrum der Reihe $\varkappa$ $(UU_1; CC_1)$, U_0 der Pol der Geraden $\overline{QU}$ bezüglich $\varkappa$, U_{10} der Schnittpunkt der Geraden q und $\overline{QU}$, und A_0, A_{10} dasjenige Paar bezüglich $\varkappa$ conjugirter Punkte der Geraden q, welches durch U_0 und U_{10} harmonisch getrennt und im vorliegenden Fall reell ist. Dann ist das Punktpaar VW auf q dargestellt durch die involutorische Reihe q $(U_0\ U_{10}; A_0\ A_{10})$.

Da U_0 und U_{10} durch A_0 und A_{10} harmonisch getrennt sind, so entsprechen die Punkte U_{10}, A_0, U_0, A_{10} den resp. Punkten U_{10}, A_{10}, U_0, A_0 projectivisch. Projicirt man die erste Gruppe aus U, die zweite aus Q, so erhält man vier Paare

einander entsprechender Strahlen zweier projectivischen und perspectivisch liegenden Büschel. Daher schneiden sich die Strahlenpaare $\overline{UU_0}$ und $\overline{QU_0}$, $\overline{UA_0}$ und $\overline{QA_{10}}$, $\overline{UA_{10}}$ und $\overline{QA_0}$ in drei Punkten U_0, B'_1, B' einer Geraden p, welche, wie man sieht, durch U_0 geht.

Durch diese Gerade p als Involutionsaxe der involutorischen Reihe der ersten Pole der Punkte von $\varkappa$ und U als einen Ordnungspunkt ist auf $\varkappa$ eine trilinear-symmetrische Verwandtschaft bestimmt (§. 16). Die Tangente in U an $\varkappa$ schneidet p in dem Involutionscentrum U_0 der zu U gehörigen involutorischen Reihe, und man findet das Involutionscentrum X_0 der zu einem beliebigen Punkt X von $\varkappa$ gehörigen involutorischen Reihe, wenn man $\varkappa$ mit der Geraden $\overline{U_0X}$ zum zweiten Male in X' und die Gerade $\overline{X'U}$ mit p im Punkte X_0 zum Durchschnitt bringt (§. 19, I). — Der Punkt U_1, der mit U das erste Polpaar von U bildet, ist der zweite Schnittpunkt von $\varkappa$ mit $\overline{QU}$. Ordnet man nun dem Strahle des Büschels U_1, der einen Punkt X von $\varkappa$ projicirt, die Verbindungslinie der ersten Pole von X zu, so erhält man zwei projectivische, perspectivisch liegende Büschel U_1 und P, wo P den Pol von p bezüglich $\varkappa$ bedeutet. Entsprechende Strahlen schneiden sich auf einer Geraden, welche ihrerseits die Curve $\varkappa$ in den beiden von U verschiedenen Ordnungspunkten der trilinearen Verwandtschaft schneidet. Es bleibt zu zeigen, dass dies die Gerade q ist.

Schneiden die Geraden $\overline{UA_0}$ und $\overline{UA_{10}}$ die Curve $\varkappa$ zum zweiten Male in B und B_1, so läuft die Gerade $\overline{BB_1}$ sowohl durch Q als auch durch U_0, denn weil A_0 und A_{10} bezüglich $\varkappa$ conjugirt sind, so liegen je zwei Punkte von $\varkappa$, welche auf den Verbindnngslinien von A_0 und A_{10} mit einem beliebigen Punkt von $\varkappa$ liegen, mit dem Pol Q von $\overline{A_0A_{10}}$ in gerader Linie. (Vergl. v. Staudt, »Beiträge« p. 48). Ferner sind U und U_1 durch B und B_1 harmonisch getrennt, da diese Punktpaare von $\varkappa$ die Projectionen der Punktpaare U_0 U_{10} und

A_0 A_{10} von p aus dem Punkte U sind; folglich muss $\overline{BB_1}$ auch durch U_0 gehen. — Von dem vollständigen Viereck $UB\,U_1\,B_1$ schneiden sich die Gegenseiten $\overline{UU_1}$ und $\overline{BB_1}$ in Q, folglich liegen die Schnittpunkte der beiden anderen Paare von Gegenseiten auf der Polare q von Q, d. h. es läuft $\overline{U_1B}$ durch A_{10}, $\overline{U_1B_1}$ durch A_0. — Den Strahlen $\overline{U_1B}$ und $\overline{U_1B_1}$ entsprechen aber in der projectivischen Beziehung des Büschels U_1 zum Büschel P die Strahlen $\overline{PA_{10}}$ und $\overline{PA_0}$. Denn die Involutionscentren der zu B und B_1 in der trilinearen Verwandtschaft auf $\varkappa$ gehörigen involutorischen Reihen sind B' resp. B'_1 (§. 19, I.). Die Polare von B' bezüglich $\varkappa$ ist aber die Gerade $\overline{PA_{10}}$, denn in B' schneiden sich die Polaren p und $\overline{QA_0}$ der Punkte P und A_{10}; ebenso ist $\overline{PA_0}$ die Polare von B'_1 bezüglich $\varkappa$. — Folglich schneiden sich $\overline{U_1B}$ und $\overline{PA_{10}}$, ebenso $\overline{U_1B_1}$ und $\overline{PA_0}$ auf der Geraden q, welche somit der perspectivische Durchschnitt der projectivischen Büschel U_1 und P ist. Damit ist bewiesen, dass die trilinear-symmetrische Verwandtschaft auf $\varkappa$, deren einer Ordnungspunkt der Punkt U ist und welche p zur Involutionsaxe der Reihe der ersten Pole der Punkte von $\varkappa$ hat, auch die conjugirt-imaginären Punkte V und W zu Ordnungspunkten hat.

Es wird zweckmässig erscheinen, die Construction der Geraden p befreit von allem zum vorigen Beweise nöthigen Beiwerk noch einmal anzugeben.

Ist also U der reelle Ordnungspunkt, sind V und W die conjugirt-imaginären Ordnungspunkte, welche durch eine einstimmig-involutorische Punktreihe auf $\varkappa$, deren Involutionscentrum Q ist, gegeben sind, so construire man die Polare q von Q bezüglich $\varkappa$, schneide sie mit der Tangente in U an $\varkappa$ im Punkte U_0, ziehe die Gerade $\overline{QU_0}$, welche $\varkappa$ in B und B_1 schneidet, und die Geraden $\overline{UB}$ und $\overline{UB_1}$, welche q in A_0 und A_{10} schneiden, bestimme dann den Schnittpunkt B' von $\overline{QA_0}$

und $\overline{UA_{10}}$ oder den Schnittpunkt B'_1 von $\overline{QA_{10}}$, und $\overline{UA_0}$, so liegen B' und B'_1 mit U_0 auf der gesuchten Geraden p.

Nach der v. Staudt'schen Darstellung des Imaginären unterscheidet man die durch die involutorische Reihe q $(UU_{10}; AA_{10})$ gegebenen Punkte V und W, indem man die Reihe in einem oder dem andern Sinne durchläuft. Stellt also die Reihe q $(U_0, A_0, U_{10}, A_{10})$ den Punkt V dar, so stellt die Reihe q $(U_0, A_{10}, U_{10}, A_0)$ den Punkt W dar. Die Punkte U, V, W bilden ein Dreieck, von dessen Seiten die eine $\overline{VW} = q$ reell ist; die beiden anderen sind conjugirt-imaginär und haben die Darstellungen $U(U_0, A_0, U_{10}, A_{10}) = \overline{UV}$ und

$U(U_0, A_{10}, U_{10}, A_0) = \overline{UW}$ (v. Staudt. »Beiträge« p. 76). Von den Tangenten an $\varkappa$ in U, V, W ist die eine $= UU_0$ reell; die beiden anderen conjugirt-imaginären haben die Darstellungen

$$Q(U_0, A_0, U_{10}, A_{10}) \text{ und } Q(U_0, A_{10}, U_{10}, A_0).$$

Die Seiten des Dreiecks UVW schneiden die Tangenten an $\varkappa$ in den ihnen gegenüberliegenden Eckpunkten in drei Punkten der Geraden p; einer derselben U_0 ist reell; die anderen beiden conjugirt-imaginären haben die Darstellungen

$$W_0 = p(U_0, B'_1, C, B') = (\overline{UV}, \overline{QW})$$
$$V_0 = p(U_0, B', C, B'_1) = (\overline{UW}, \overline{QV}),$$

wo C der Schnittpunkt von p mit $\overline{QU}$ ist und die Punkte B', B'_1 durch C und U_0 harmonisch getrennt sind.

Man sieht, dass in dieser Darstellung die Gerade p nach derselben Vorschrift zu construiren ist, als in dem Falle, wenn alle drei Punkte U, V, W reell sind.

Sind U, V, W reell und V_0, W_0 die Punkte, in denen p von den Geraden $\overline{UW}$ und $\overline{UV}$ geschnitten wird, so bilden die Punkte V, W, V_0, W_0 ein vollständiges Viereck, von (Fig. 17) dem $\overline{VW} = q$ und $\overline{V_0 W_0} = p$ zwei Gegenseiten, die Punkte U und Q zwei Diagonalpunkte sind. Also sind p und q durch U und Q harmonisch getrennt.

Da nun q die Curve $\varkappa$ in zwei reellen Punkten V und W schneidet, muss p sie in imaginären Punkten schneiden. Sind V und W conjugirt-imaginär, so betrachte man das Viereck (Fig. 18) $UB'QB'_1$. Auch hier sind p und q durch U und Q harmonisch getrennt. Da aber nun q die Curve in imaginären Punkten schneidet, so schneidet p sie in reellen Punkten. Daraus folgt:

Die Ordnungselemente eines trilinear-symmetrischen Elementargebildes $\varkappa$ sind alle reell oder zwei sind conjugirt-imaginär, je nachdem die beiden Elemente S und T, in denen je zwei erste Polarelemente eines Elements zusammenfallen (§. 16), conjugirt-imaginär oder reell sind. Und umgekehrt.

Denn auf der trilinear-symmetrischen Curve $\varkappa$ sind diese Elemente S und T die Schnittpunkte von $\varkappa$ mit der Geraden p.

Da eine trilinear-symmetrische Verwandtschaft durch ihre drei Ordnungselemente bestimmt ist, so kann man drei beliebige Elemente U, V, W eines Elementargebildes $\varkappa$ als Ordnungselemente einer solchen Verwandtschaft geben. Die Polarelemente (§. 15) eines Elements A von $\varkappa$ in dieser Verwandtschaft nennt man dann auch die Polarelemente von A bezüglich des »Systems von drei Elementen UVW« oder des »Elemententripels« UVW. Hierbei können auch zwei der Elemente conjugirt-imaginär angenommen werden.

Ist auf einer Curve II. Ordnung $\varkappa$ ein Punkttripel U, V, W gegeben, so folgt aus dem Vorigen noch eine einfache Construction der ersten Pole der Punkte von $\varkappa$ bezüglich des Tripels UVW.

Ist nämlich U ein reeller Punkt, ist ferner q die Verbindungslinie der Punkte V und W, U_1 der von U durch V und W harmonisch getrennte Punkt und P der Brianchon'sche Punkt des Dreiseits UVW, also der Schnittpunkt dreier Geraden, welche je einen der Punkte U, V, W mit dem Schnittpunkt der Tangenten an $\varkappa$ in den beiden andern verbinden, so beziehe man die Büschel U_1 und P perspectivisch auf die Gerade q.

Ein Strahl von U_1 schneidet $\varkappa$ dann in einem Punkte A, dessen erste Pole bezüglich des Tripels UVW die Schnittpunkte von $\varkappa$ mit dem entsprechenden Strahle von P sind.

In der That ist durch U, V, W als Ordnungspunkte auf $\varkappa$ eine trilinear-symmetrische Verwandtschaft bestimmt, in der U_1 U das erste Polpaar von U bilden und die Polare p von P bezüglich $\varkappa$ die Involutionsaxe der Reihe der ersten Pole der Punkte von $\varkappa$ ist. Zwei Strahlen von U_1 und P, von denen der zweite die ersten Pole des von dem andern projicirten Punkts von $\varkappa$ verbindet, schneiden sich aber auf q.

§. 21.

Im Allgemeinen fallen von den drei Ordnungspunkten U, V, W einer trilinear-symmetrischen Curve II. Ordnung $\varkappa$ keine zwei zusammen. Denn wenn etwa V und W zusammenfallen, so muss ihre Verbindungslinie q Tangente an $\varkappa$ im (Fig. 17 u. 18) Punkte VW sein. Nun sind aber q und p durch U und den Pol Q von q bezüglich $\varkappa$ harmonisch getrennt. Liegt also Q auf q, so muss p mit q zusammenfallen, also müssen die Ordnungspunkte der involutorischen Reihe der ersten Pole der Punkte von $\varkappa$ zusammenfallen. Umgekehrt, wenn dies der Fall ist, so berührt p die Curve, und daher muss q mit p zusammenfallen. Also folgt:

> Fallen zwei Ordnungselemente eines trilinear-symmetrischen Elementargebildes in ein Element zusammen, so fallen in dasselbe Element die Ordnungselemente der involutorischen Reihe der ersten Polarelemente der Elemente des Gebildes zusammen. Und umgekehrt.

Die letztere Reihe ist also von specieller Art, indem von je zwei einander zugeordneten Elementen das eine mit einem festen Element zusammenfällt.

> Fallen also zwei Ordnungselemente eines trilinear-symmetrischen Elementargebildes $\varkappa$ in ein Element V zusammen, so ist das letztere ein erstes Polarelement jedes Elements von $\varkappa$. Die beiden ersten Polarelemente von V fallen in

V zusammen; das zweite Polarelement von V ist unbestimmt.

Denn da ein erstes Polarelement eines Ordnungselements V von diesem durch die beiden andern Ordnungselemente harmonisch getrennt ist, hier aber zwei in V zusammenfallen, so fällt auch das andere der ersten Polarelemente von V nach V selbst. Das zweite Polarelement des Elements V ist durch die ersten Polarelemente desselben von V harmonisch getrennt, also unbestimmt.

Die von V verschiedenen ersten Polarelemente der Elemente von $\varkappa$ entsprechen letzteren projectivisch; denn ist $\varkappa$ eine Curve II. Ordnung, so entspricht (Fig. 19) jedem Punkt B derselben die Verbindungslinie seiner ersten Pole projectivisch. In unserem Falle gehen diese Geraden sämmtlich durch V. Wenn B daher die Curve $\varkappa$ beschreibt, beschreibt die Verbindungslinie der ersten Pole von B den Büschel V und somit der von V verschiedene erste Pol B_1 von B eine zur Reihe der B projectivische Reihe. Hieraus folgt (§. 14):

Nimmt man in einer Curve II. Ordnung $\varkappa$ ein Element V an und bezieht $\varkappa$ projectivisch so auf sich selbst, dass man je einem von drei gegebenen Punkten A, B, B' denjenigen Punkt A_1, B_1, B'_1 zuordnet, der durch die beiden andern von V harmonisch getrennt ist, so erhält man auf $\varkappa$ eine trilinear-symmetrische Verwandtschaft, wenn man den Punkt V mit je einem der Punkte A_1, B_1, B'_1 als ein Punktpaar einer involutorischen Reihe betrachtet, deren Ordnungspunkte in V zusammenfallen und diese Punktpaare den Punkten A, B, B' projectivisch entsprechen lässt. Zwei Ordnungspunkte der Verwandtschaft fallen dann in V zusammen.

Denn dann ist jedem der Punkte A, B, B' das durch die beiden anderen harmonisch von ihm getrennte Punktpaar einer involutorischen Reihe zugeordnet.

Oder auch:

Sind A, A_1 und V drei Elemente eines Elementarge-

bildes $\varkappa$, sind ferner B und B' irgend zwei durch A_1 und V harmonisch getrennte Elemente, und ordnet man den Elementen B und B' die durch A und B' resp. B von V harmonisch getrennten Elemente B_1 und B'_1 zu, so lässt sich die Beziehung als eine trilinear-symmetrische Verwandtschaft auffassen, von welcher zwei Ordnungselemente in V zuammenfallen und in der die Elemente B_1, B'_1 die von V verschiedenen ersten Polarelemente von B resp. B' sind.

Die Elemente B_1, B'_1 . . . entsprechen den Elementen B, B' . . . projectivisch. Das Element V ist eines der entsprechend gemeinschaftlichen Elemente der beiden projectivischen Reihen; das andere ist das dritte Ordnungselement U des trilinear-symmetrischen Gebildes.

In der That, wenn man die Tangente an die Curve $\varkappa$ in V zur Involutionsaxe p der involutorischen Reihe der (Fig. 19) ersten Pole der Punkte von $\varkappa$ nimmt und A_1 einen ersten Pol von A sein lässt, so erhält man die im Satze angegebene Beziehung nach Früherem (§. 19, I).

Es kann endlich auch der Fall eintreten, dass sämmtliche drei Ordnungspunkte der trilinear-symmetrischen Curve $\varkappa$ zusammenfallen. Nehmen wir an, dass zwei in V bereits (Fig. 19) zusammengefallen sind, dass U der dritte Ordnungspunkt und p die Tangente an $\varkappa$ in V ist. Ist nun U_0 der Pol von $\overline{UV}$ bezüglich $\varkappa$, sind B und B' zwei mit U_0 in gerader Linie liegende Punkte von $\varkappa$, so ist das Involutionscentrum der zu B gehörigen involutorischen Reihe auf $\varkappa$ der Schnittpunkt B_0 von $\overline{UB'}$ und p. Fällt nun U mit V zusammen, so fällt auch U_0 und einer der Punkte B, B', etwa B', mit V zusammen, also fällt auch B_0 nach V, während der Schnittpunkt von $\overline{UB'}$ mit p, d. i. das Involutionscentrum der zu $B'=V$ gehörigen involutorischen Punktreihe unbestimmt wird, da UB' mit p zusammenfällt. Also folgt:

Fallen die drei Ordnungselemente eines trilinear-sym-

metrischen Elementargebildes $\varkappa$ in ein Element V zusammen, so fallen nach V auch die beiden ersten Polarelemente und das zweite Polarelement jedes beliebigen Elements, während die Polarelemente von V unbestimmt sind.

§. 22.

Auf die Theorie der trilinear-symmetrischen Elementargebilde gründet sich eine Methode der graphischen Auflösung der Gleichungen dritten Grades mit einer Unbekannten (Vergl. Chasles. Liouville J. 1855 p. 329 und Comptes rendus, T. XLI. p. 677).

Eine trilinear-symmetrische Verwandtschaft zwischen den Elementen eines Gebildes einer Dimension ist gegeben durch die Gleichung

$$(1) \quad axyz + b(xy + yz + zx) + c(x + y + z) + d = o,$$

wo die x, y, z Variable, die a, b, c Constante sind. Die Ordnungselemente der Verwandtschaft sind die Wurzeln der Gleichung

$$(2) \quad ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = o.$$

Ist umgekehrt die Gleichung (2) gegeben, so erhält man ihre Wurzeln als Ordnungselemente des durch die Gleichung (1) gegebenen trilinear-symmetrischen Gebildes.

Um diese Wurzeln zu construiren, wird man eine Gerade a und einen Kegelsschnitt $\varkappa$ annehmen, dann drei Zahlgruppen x, y, z bestimmen, welche die Gleichung (1) befriedigen, und sie auf a von einem festen Punkt O aus als Strecken abtragen. Die Endpunkte dieser Strecken projicire man dann aus einem festen Punkte O' von $\varkappa$ auf diese Curve, so hat man auf dieser drei Gruppen von je drei Punkten, welche ein trilinear-symmetrische Verwandtschaft bestimmen. Die Ordnungselemente derselben von O' auf a projicirt geben die Wurzelpunkte der Gleichung (2).

Wenn $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$, $x_3 y_3 z_3$ die drei Zahlgruppen sind, welche der Gleichung (1) genügen, so dürfen sie, um eine

trilinear-symmetrische Verwandtschaft zu bestimmen, nicht Gruppen einander zugeordneter Elemente einer und derselben cubisch-involutorischen Reihe sein; d. h., wenn zwei von den drei Gruppen die Wurzeln der Gleichungen

$$A x^3 + 3 B x^2 + 3 C x + D = o \text{ und resp.}$$

$$A_1 x^3 + 3 B_1 x^2 + 3 C_1 x + D_1 = o \text{ sind,}$$

so darf es keinen Werth von λ geben, für den die dritte Gruppe die Wurzeln der Gleichung

$$(A x^3 + 3 B x^2 + 3 C x + D) + \lambda (A_1 x^3 + 3 B_1 x^2 + 3 C_1 x + D_1) = o$$

bildet.

Die Gleichung

$$(3) \quad (a x + b) y^2 + 2 (b x + c) y + c x + d = o$$

liefert die beiden ersten Pole y jedes Elements x des durch (1) gegebenen trilinear-symmetrischen Gebildes. Zur Bestimmung der trilinear-symmetrischen Verwandtschaft auf der Curve $\varkappa$ wird es am bequemsten sein, aus der Gleichung (3) zu drei Werthen x_1, x_2, x_3 von x die zugehörigen Werthepaare $y_1 y'_1$, $y_2 y'_2$, $y_3 y'_3$ von y bestimmen. Die den letzteren auf $\varkappa$ entsprechenden Punktepaare liefern durch ihre Verbindungslinien drei Strahlen eines Strahlenbüschels I. Ordnung P, welche den Punkten von $\varkappa$, die den Werthen x_1, x_2, x_3 entsprechen, projectivisch zugeordnet sind. Projicirt man die letztere aus O', so erzeugen die projectivischen Büschel O' und P eine Curve II. Ordnung λ, deren von O' verschiedene Schnittpunkte mit $\varkappa$ die Ordnungspunkte der trilinear-symmetrischen Curve $\varkappa$ sind.

Damit ist die graphische Lösung der Gleichungen dritten Grades mit einer Unbekannten zurückgeführt auf die Fundamental-Aufgabe aller Aufgaben dritten und vierten Grades, nämlich auf die Aufgabe, wenn ein Schnittpunkt zweier beliebig gegebenen Kegelschnitte bekannt ist, die drei übrigen Schnittpunkte derselben zu construiren. (Vergl. Schröter. »Theorie der Kegelschnitte.« I. Aufl. p. 400. — Kortum. »Ueber geometrische Aufgaben dritten und vierten Grades.« Bonn. 1869.)

III.

Das Tripelnetz.

§. 23.

Die Punktpaare einer trilinear-symmetrischen Curve II. Ordnung $\varkappa$, welche einen und denselben Punkt A zum gemischten Pol haben, bilden eine (quadratisch-) involutorische Punktreihe (§ 15). Auch von je zwei conjugirt-imaginären einander zugeordneten Punkten der letzteren (§. 1) soll gesagt werden, dass sie in der auf $\varkappa$ bestehenden trilinear-symmetrischen Verwandtschaft den Punkt A zum gemischten Pol haben.

Je zwei conjugirt-imaginäre Punkte von $\varkappa$ haben einen reellen Punkt A zum gemischten Pol; denn es giebt stets ein Paar erster Pole eines Punktes A, durch welche die angenommenen Punkte harmonisch getrennt sind, und da die ersten Pole von A die Ordnungspunkte der zu A gehörigen involutorischen Reihe sind, welche von den Punktpaaren gebildet wird, die A zum gemischten Pol haben, so sind die beiden conjugirt-imaginären Punkte in dieser involutorischen Reihe einander zugeordnet, haben also A zum gemischten Pol.

Von einem Tripel zusammengehöriger Punkte der trilinear-symmetrischen Curve $\varkappa$ können demnach zwei auch conjugirt-imaginär sein.

Wir haben oben (§. 18) eine cubisch-involutorische Reihe auf einer Curve II. Ordnung $\varkappa$ definirt als die Gesammtheit der Tripel der Eckpunkte derjenigen Dreiecke, die der Curve $\varkappa$ eingeschrieben und gleichzeitig einem zweiten Kegelschnitt λ umschrieben sind. Wir werden bei einer andern Gelegenheit zeigen, dass die cubisch-involutorischen Reihen sich auch auf Grund der Theorie der trilinear-symmetrischen Elementargebilde definiren lassen. Hier wollen wir zeigen, dass man von der obigen Definition der cubisch-involutorischen Reihen ausgehend

zu einer zweiten Erzeugungsart der trilinear-symmetrischen Verwandtschaft gelangen kann, und hieran anschliessend wollen wir einen Zusammenhang, der zwischen einer trilinear-symmetrischen Curve II. Ordnung oder Klasse und der Theorie der linearen Kegelschnitt-Mannigfaltigkeiten zweiter Stufe besteht, nachweisen.

Da die sechs Seiten zweier auf der Curve II. Ordnung $\varkappa$ liegenden Dreiecke eine und dieselbe durch sie bestimmte zweite Curve II. Ordnung λ berühren, so folgt:

Eine cubisch-involutorische Reihe ist durch zwei Tripel einander zugeordneter Elemente bestimmt.

Ferner gilt der Satz:

Durch ein Element eines Tripels einander zugeordneter Elemente einer gegebenen cubisch-involutorischen Reihe sind die beiden anderen Elemente des Tripels bestimmt.

Denn die beiden von dem Punkte an λ gehenden Tangenten schneiden $\varkappa$ in den beiden andern Punkten des Tripels.

Es seien nun $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ zwei Tripel zusammengehöriger Punkte einer trilinear-symmetrischen Verwandtschaft auf $\varkappa$. Durch die beiden Tripel ist zugleich eine cubisch-involutorische Reihe bestimmt, und es sei $A_3B_3C_3$ ein beliebiges Tripel der letzteren. Die drei Dreiecke $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ und $A_3B_3C_3$ sind einer und derselben Curve II. Ordnung λ umschrieben, welche auch von der Involutionsaxe p der involutorischen Reihe der ersten Pole der Punkte der trilinear-symmetrischen Curve $\varkappa$ berührt wird (§. 18). Nun entsprechen die Seiten der drei Dreiecke als Tangenten von λ und somit auch ihre Schnittpunkte mit p den ihnen gegenüberliegenden Eckpunkten als Punkten von $\varkappa$ projectivisch (§. 18); folglich schneiden die Geraden $\overline{B_3C_3}$, $\overline{C_3A_3}$, $\overline{A_3B_3}$ die Gerade p in Punkten, die den Punkten A_3, B_3, C_3 in der nämlichen projectivischen Beziehung zwischen p und $\varkappa$ entsprechen, welche man erhält, wenn man jedem Punkte von $\varkappa$ das Involutionscentrum der ihm in der trilinear-

symmetrischen Verwandtschaft zugehörigen involutorischen Punktreihe auf $\varkappa$ zuordnet, d. h. A_3, B_3, C_3 sind auch drei zusammengehörige Punkte der trilinear-symmetrischen Verwandtschaft. Also folgt:

I. Zwei Tripel zusammengehöriger Punkte der trilinear-symmetrischen Curve $\varkappa$ bestimmen eine cubisch-involutorische Reihe, deren sämmtliche Tripel auch Tripel zusammengehöriger Punkte der trilinear-symmetrischen Curve sind.

Nennt man die Gesammtheit der Tripel einer cubisch-involutorischen Reihe einen »Tripelbüschel«, so kann man auch sagen:

Zwei Tripel zusammengehöriger Punkte der trilinear-symmetrischen Verwandtschaft auf $\varkappa$ bestimmen einen Büschel von Tripeln zusammengehöriger Punkte der Verwandtschaft.

Wir wollen von einem solchen Tripelbüschel sagen, er sei in der trilinear-symmetrischen Verwandtschaft enthalten.

Die Verbindungsgeraden der Punkte der Tripel zweier in der Verwandtschaft enthaltenen Büschel bilden zwei Strahlenbüschel II. Ordnung, welche ausser p drei Strahlen mit einander gemein haben. Die Strahlenbüschel sind projectivisch auf $\varkappa$ bezogen, u. z. so, dass jedem Strahl eines derselben der gemischte Pol seiner beiden Schnittpunkte mit $\varkappa$ entspricht. Die drei Punkte bilden ein Tripel, dessen Verbindungsgeraden dem Strahlenbüschel angehören. Haben also die beiden Büschel einen Strahl gemeinschaftlich, so haben sie auch diejenigen beiden Strahlen gemeinschaftlich, welche die Schnittpunkte des ersten mit $\varkappa$ mit dem gemischten Pol dieser Punkte verbinden. Folglich müssen die drei Strahlen, welche die Büschel ausser p gemeinschaftlich haben, die Verbindungslinien eines Punkttripels von $\varkappa$ sein.

Daher gilt der Satz:

II. Zwei in einer trilinear-symmetrischen Verwandtschaft

enthaltene Tripelbüschel haben allemal ein Tripel zusammengehöriger Punkte gemeinschaftlich.

Es seien nun α, β und γ drei Tripel zusammengehöriger Punkte, die nicht einem und demselben Büschel angehören. Zwei beliebige derselben α und β bestimmen einen in der Verwandtschaft enthaltenen Büschel und jedes Tripel desselben bestimmt mit γ einen neuen Büschel, dessen sämmtliche Tripel nach dem Satze I. Tripel zusammengehöriger Punkte der Verwandtschaft sind. Umgekehrt ist aber auch jedes beliebige Tripel zusammengehöriger Punkte in einem der ersteren Büschel enthalten. Denn mit γ bestimmt es einen Büschel, der nach dem Satze II. mit dem durch α und β bestimmten Büschel ein Tripel gemein hat, so dass es also in einem der Büschel liegt, die durch γ und irgend ein Tripel des durch α und β gegebenen Büschels bestimmt sind.

Hiermit sind wir zu einer neuen Definition eines trilinearsymmetrischen Elementargebildes gekommen. Wir können nämlich sagen:

Durch drei Elemententripel eines Elementargebildes, welche nicht einem und demselben Tripelbüschel angehören, ist ein Netz von Elemententripeln des Gebildes bestimmt. Zwei beliebige der drei Tripel bestimmen einen Tripelbüschel und jedes Tripel desselben bestimmt mit dem dritten Tripel einen neuen Büschel, dessen sämmtliche Tripel wir als dem Netze angehörig betrachten.

Die Gesammtheit der Tripel des Netzes ist identisch mit der Gesammtheit der Tripel zusammengehöriger Elemente derjenigen trilinear-symmetrischen Verwandtschaft, welche durch die gegebenen drei Tripel zusammengehöriger Elemente zwischen den Elementen des Elementargebildes bestimmt wird.

Aus dem Beweise des Vorigen folgt noch der Satz:

Ein Tripelnetz auf einem Elementargebilde ist durch irgend drei seiner Tripel, welche nicht einem und demselben Büschel angehören, bestimmt.

Die Gesammtheit derjenigen in einem Tripelnetze enthaltenen cubisch-involutorischen Reihen, welche ein Tripel des Netzes gemeinsam haben, soll ein »Büschel von cubisch-involutorischen Reihen des Netzes« heissen.

Es gilt der Satz:

Zwei in einem Tripelnetz enthaltene cubisch-involutorische Reihen bestimmen einen sie enthaltenden Büschel von cubisch-involutorischen Reihen des Netzes.

In der That haben die beiden Reihen ein Tripel gemeinsam und bestimmen also sämmtliche Reihen, denen dies Tripel angehört.

Ferner gilt der Satz:

Zwei Büschel von cubisch-involutorischen Reihen eines Tripelnetzes haben allemal eine cubisch-involutorische Reihe des Netzes gemeinsam.

Denn die beiden Tripel, durch welche die beiden Büschel bestimmt werden, bestimmen zugleich eine sie enthaltende cubisch-involutorische Reihe.

Aus diesen beiden Sätzen ergiebt sich nun:

Durch irgend drei in einem Tripelnetze enthaltene cubisch-involutorische Reihen, die nicht ein Tripel gemein haben, sind sämmtliche cubisch-involutorische Reihen des Netzes bestimmt. Zwei beliebige der drei gegebenen Reihen bestimmen nämlich einen Büschel von cubisch-involutorischen Reihen des Netzes, und jede Reihe dieses Büschels bestimmt mit der dritten gegebenen Reihe einen neuen Büschel, dessen sämmtliche cubisch-involutorische Reihen dem Netze angehören.

Dass dem so ist, und dass man auf diese Weise auch sämmtliche cubisch-involutorische Reihen des Netzes erhält, folgt mit Hilfe der vorausgeschickten Sätze ebenso, wie aus den analogen Sätzen für Tripel folgte, dass ein Netz durch drei seiner Tripel bestimmt ist.

Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich noch, dass die Mannigfaltigkeiten eines Tripelnetzes und einer Ebene mit ein-

ander vergleichbar sind. Vergleicht man das Tripel mit einem Punkt der Ebene, so entspricht dem Tripelbüschel oder der cubisch-involutorischen Reihe als Ort von Tripeln die Punktreihe I. Ordnung in der Ebene, oder, wenn man die cubisch-involutorische Reihe als selbstständiges Element des Netzes betrachtet, die Gerade als Element der Ebene betrachtet. Dem Büschel von cubisch-involutorischen Reihen entspricht in der Ebene der Strahlenbüschel I. Ordnung. Man sieht auch leicht ein, dass, wie eine Ebene durch einen Punkt und eine Gerade oder zwei sich schneidende Gerade bestimmt wird, ein Tripelnetz durch ein Tripel und eine cubisch-involutorische Reihe oder zwei cubisch-involutorische Reihen, welche ein Tripel gemeinsam haben, bestimmt werden kann.

§. 24.

Wir betrachten ein Netz von Punkttripeln, welches auf einer Curve II. Ordnung $\varkappa$ liegt. Die Verbindungslinien der Tripel einer im Netz enthaltenen cubisch-involutorischen Reihe sind einer Curve II. Klasse umschrieben, welche auch von der Geraden p, der Involutionsaxe der involutorischen Reihe der ersten Pole der Punkte von $\varkappa$, berührt wird. Die cubisch-involutorischen Reihen des Netzes, welche einen Büschel bilden, haben ein Tripel gemeinschaftlich, folglich werden die Curven II. Klasse, welche von den Verbindungslinien der Tripel aller dieser Reihen umhüllt werden, von den Verbindungslinien der Punkte des gemeinsamen Tripels und ausserdem von p berührt, d. h. sie bilden eine Schaar. Sämmtliche cubisch-involutorische Reihen des Netzes sind durch drei beliebige derselben, also auch sämmtliche durch sie bestimmte Curven II. Klasse durch drei beliebige derselben i. A. bestimmt, u. z. erhält man sämmtliche Curven, indem man jede Curve der durch zwei der drei gegebenen Curven bestimmten Schaar mit der dritten Curve zu einer neuen Schaar verbindet. Jede Curve einer dieser Schaaren wird von den Verbindungslinien der Tripel einer cubisch-involutorischen Reihe des Netzes umhüllt. Dies geht sofort

aus der Erzeugungsweise sämmtlicher cubisch-involutorischer Reihen des Netzes aus drei gegebenen hervor. Die Gesammtheit der in der angegebenen Weise durch drei Curven bestimmten Curven bildet nun aber bekanntlich ein lineares Kegelschnittgewebe zweiter Stufe oder eine Schaarschaar (Reye. G. d. L. II. Aufl. I. Abth. p. 208). Daher können wir sagen:

> Ist auf einer Curve II. Ordnung $\varkappa$ ein Netz von Punkttripeln gegeben, so bestimmen je zwei Tripel desselben durch die Verbindungslinien ihrer Punkte eine Curve II. Klasse. Die sämmtlichen so erhaltenen Curven bilden eine Schaarschaar und haben eine gemeinschaftliche Tangente. Die Verbindungslinien der Punkte je eines Tripels bilden mit der allen Curven gemeinsamen Tangente die Basisstrahlen je einer in der Schaarschaar enthaltenen Schaar von Curven.

Es seien umgekehrt drei Curven zweiter Klasse α, β, γ gegeben, welche eine gemeinsame Tangente p haben, aber nicht einer und derselben Schaar angehören. Dann haben je zwei noch drei Seiten eines Dreiecks zu gemeinsamen Tangenten. Die Dreiecke $(\alpha\beta)$ und $(\alpha\gamma)$ sind der Curve α umschrieben, also einer zweiten Curve II. Ordnung $\varkappa$ eingeschrieben. Sei a eine Seite des dritten Dreiecks $(\beta\gamma)$, welche $\varkappa$ in den Punkten B und C schneidet. Legt man von B und C die Tangenten an die Curve β, welche sich in A schneiden mögen, so sind $(\alpha\beta)$ und ABC zwei der Curve β umschriebene Dreiecke, von denen fünf Eckpunkte, B, C und die Eckpunkte von $(\alpha\beta)$ auf $\varkappa$ liegen; folglich liegt auch A auf $\varkappa$. Die drei Dreiecke $(\alpha\beta)$, $(\alpha\gamma)$ und ABC bestimmen als Tripel zusammengehöriger Punkte aufgefasst, da sie nicht einer und derselben cubisch-involutorischen Reihe angehören, auf $\varkappa$ eine trilinear-symmetrische Verwandtschaft. Sie bestimmen ferner (§. 18) zu je zweien drei Curven II. Klasse mit einer allen dreien gemeinschaftlichen Tangente, und da nach Voraussetzung die Gerade p sowohl die Curve α als auch die Curve β, also zwei der drei Curven berührt, so berührt sie auch die Curve, welche von den Dreiecken

$(\alpha\gamma)$ und ABC bestimmt wird. Diese ist daher mit γ identisch, denn sie hat mit ihr die Seiten des Dreiecks $(\alpha\gamma)$ und die Geraden p und $\overline{BC} = a$ als Tangenten gemeinsam. Folglich ist ABC mit dem Dreieck $(\beta\gamma)$ identisch, und es liegen somit die neun Eckpunkte der Dreiecke $(\alpha\beta)$, $(\beta\gamma)$, $(\gamma\alpha)$ auf einer und derselben Curve II. Ordnung $\varkappa$.

Wir haben daher den Satz:

Wenn drei Curven II. Klasse eine Tangente gemein haben, so haben je zwei derselben noch die Seiten eines Dreiecks zu gemeinsamen Tangenten. Die neun Eckpunkte dieser Dreiecke liegen auf einer und derselben Curve II. Ordnung $\varkappa$. (Vergl. Schröter, Th. d. K. I. Aufl. p. 245.)

Hieraus folgt unmittelbar die Umkehrung des oben ausgesprochenen Satzes, nämlich:

Ist eine Schaarschaar von Curven II. Klasse mit einer allen Curven gemeinsamen Tangente p gegeben, so haben je zwei Curven der Schaarschaar noch die Seiten eines Dreiecks zu gemeinsamen Tangenten. Die Eckpunkte aller dieser Dreiecke liegen auf einer und derselben Curve II. Ordnung $\varkappa$ und bilden die Punkttripel eines auf der Curve $\varkappa$ liegenden Tripelnetzes.

Hierdurch ist nun nachgewiesen, dass die Theorie eines Netzes von Punkttripeln, welches auf einer Curve II. Ordnung liegt, identisch ist mit derjenigen einer Schaarschaar von Curven II. Klasse mit einer gemeinsamen Tangente. Nur die Ausgangspunkte sind verschieden. Während man gewöhnlich von den Curven der Schaarschaar als Elementen ausgeht, haben wir unsern Weg von den in der Schaarschaar enthaltenen Curvenschaaren ausgenommen. Beide Ausgangspunkte führen zum nämlichen Ziel und stehen sich daher auch gleichberechtigt gegenüber.

Da die trilinear-symmetrische Verwandtschaft eine projectivische Eigenschaft der Elementargebilde ist, so gelten auch

die folgenden Sätze, welche den vorgehenden in der Geometrie der Ebene reciprok gegenüberstehen.

Besteht zwischen den Strahlen eines Strahlenbüschels II. Ordnung eine trilinear-symmetrische Verwandtschaft, so bilden die sämmtlichen Tripel zusammengehöriger Strahlen desselben ein Netz. Je zwei Strahlentripel desselben bestimmen durch die Schnittpunkte ihrer Strahlen eine Curve II. Ordnung. Die sämmtlichen so erhaltenen Curven bilden ein Kegelschnittnetz oder lineares Kegelschnittsystem zweiter Stufe (Vergl. Reye. G. d. L. II. Aufl. I. Abth. p. 208. — Schröter. Th. der K. I. Aufl. p. 530) und haben einen Punkt gemeinschaftlich. Die Schnittpunkte der Strahlen je eines Tripels bilden mit dem allen Curven gemeinsamen Punkt die Basispunkte je eines in dem Netze enthaltenen Kegelschnittbüschels.

Und umgekehrt:

Ist ein Kegelschnittnetz mit einem allen Kegelschnitten desselben gemeinsamen Punkte gegeben, so schneiden sich je zwei Kegelschnitte des Netzes noch in den Eckpunkten eines Dreiecks. Die Seiten aller dieser Dreiecke gehören einem und demselben Strahlenbüschel II. Ordnung an und bilden die Strahlentripel eines Netzes von Strahlentripeln, dessen Träger der Strahlenbüschel ist.

Aus dem Vorigen folgt noch:

Die Tangententripel, welche ein Kegelschnitt einer Schaarschaar von Kegelschnitten mit einer gemeinschaftlichen Tangente mit den übrigen Kegelschnitten der Schaarschaar gemein hat, bilden eine cubisch-involutorische Reihe.

Und:

Die Punkttripel, in denen ein Kegelschnitt eines Netzes von Kegelschnitten mit einem gemeinschaftlichen Punkt von den übrigen Kegelschnitten des Netzes geschnitten wird, bilden eine cubisch-involutorische Reihe.

In der That, wenn auf einer Curve II. Ordnung ein Punkttripelnetz gegeben ist, so bestimmen je zwei Tripel desselben einen Tripelbüschel und die Verbindungslinien der Tripelpunkte desselben umhüllen einen Kegelschnitt, der in der durch das Punkttripelnetz bestimmten Schaarschaar enthalten ist. Die diesem Kegelschnitt umschriebenen Tangententripel bilden eine cubisch-involutorische Reihe, und jedes dieser Tripel ist zugleich unendlich vielen anderen Kegelschnitten der Schaarschaar umschrieben.

Druckfehler:

S. 19 Z. 8 v. u. lies 18 statt 21.

S. 37 Z. 6 v. u. lies Denn statt Dann.

Tafel I.

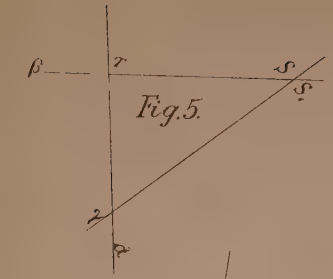


Fig. 5.

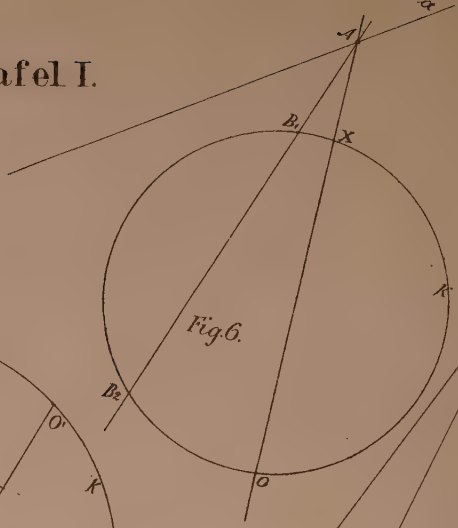


Fig. 6.

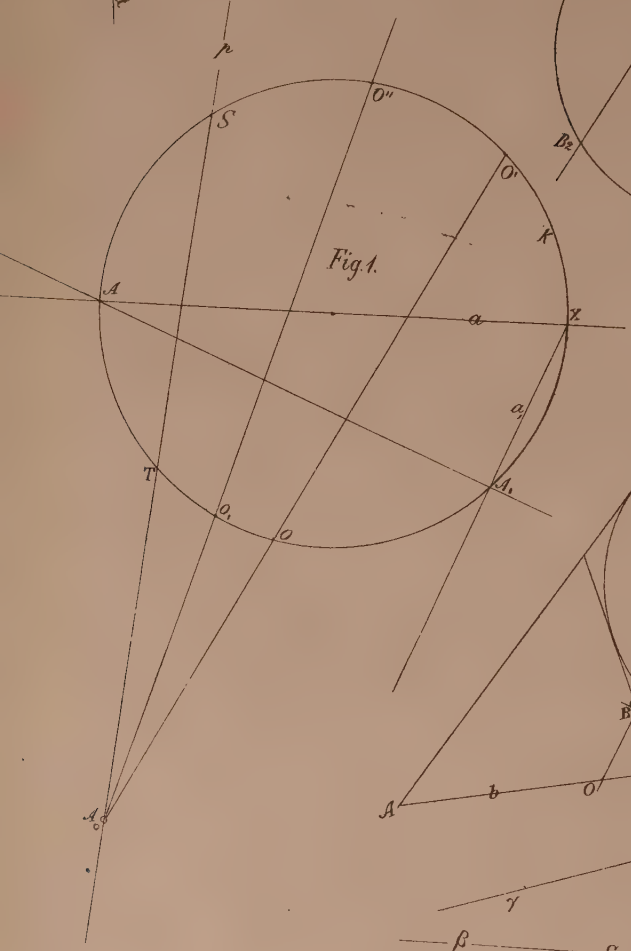


Fig. 1.

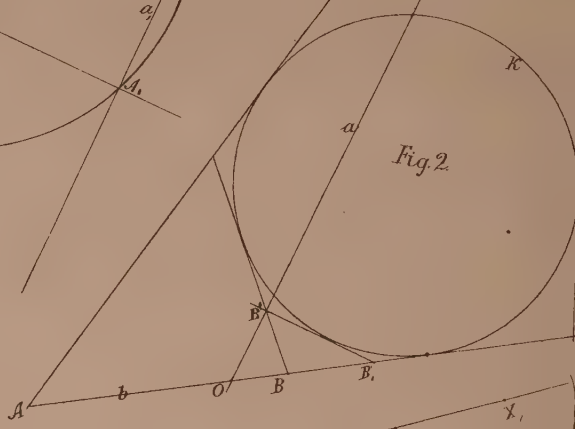


Fig. 2.

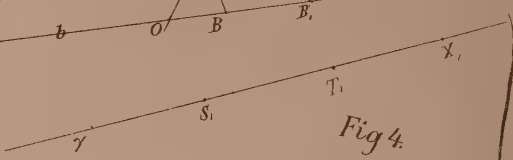


Fig 4.

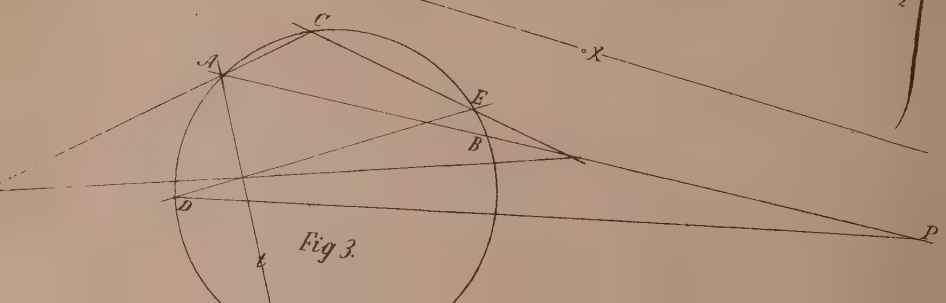
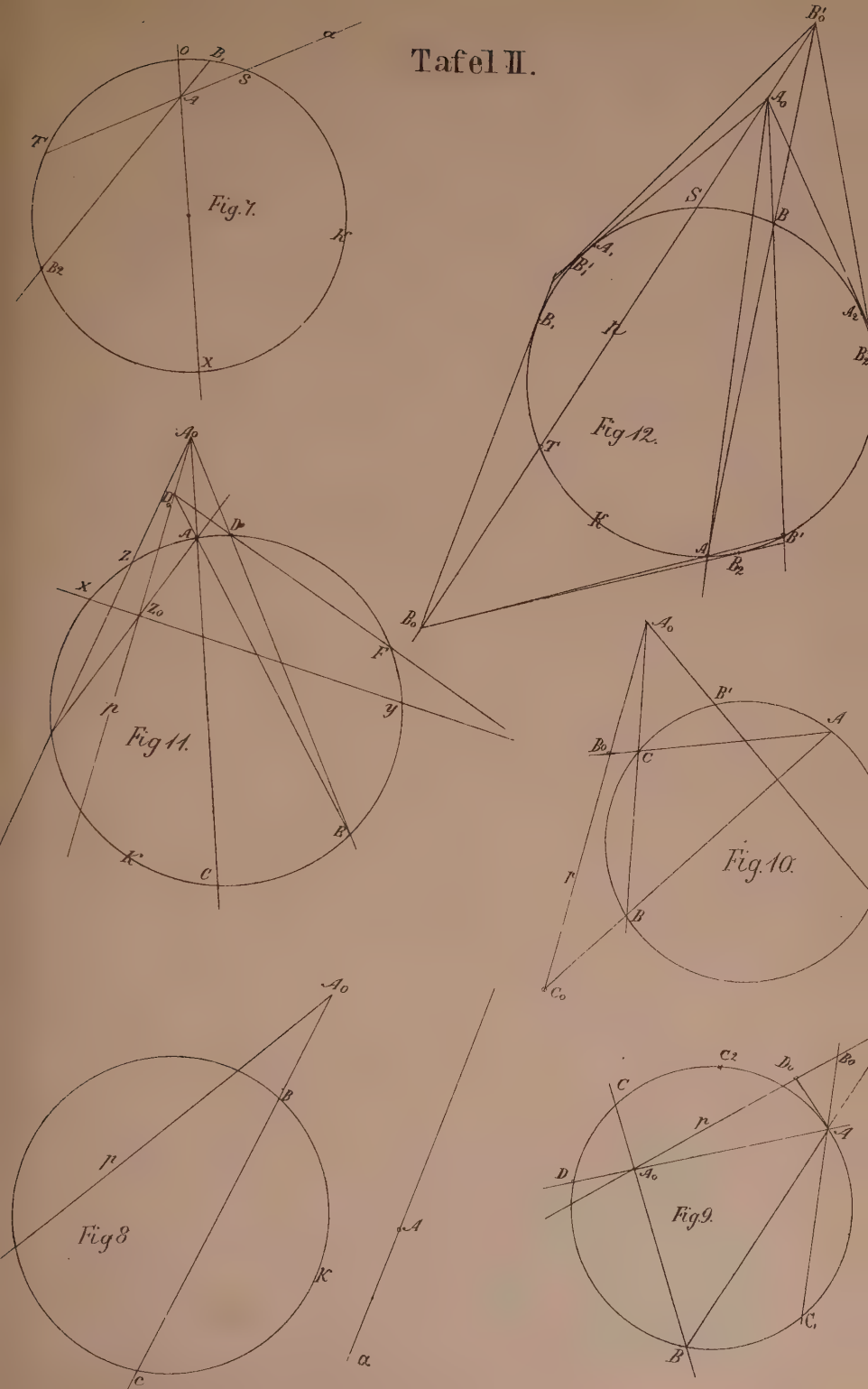
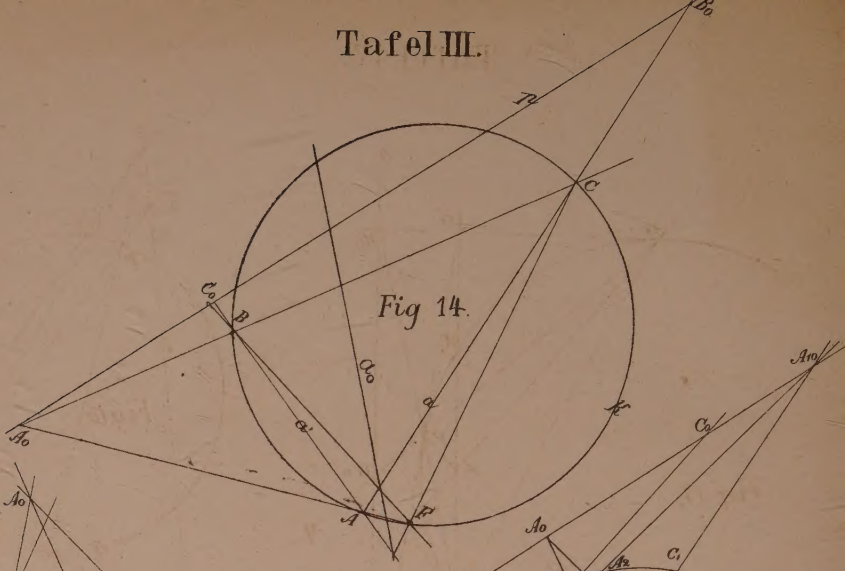


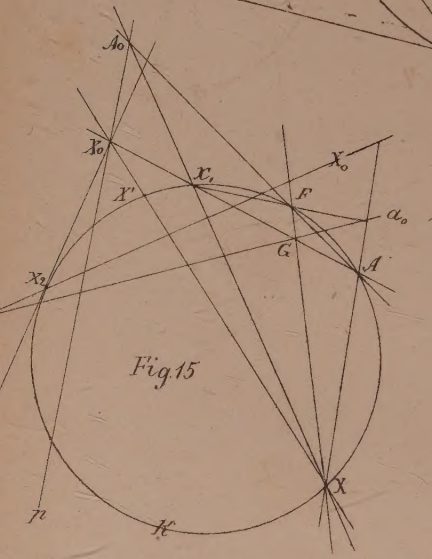
Fig 3.

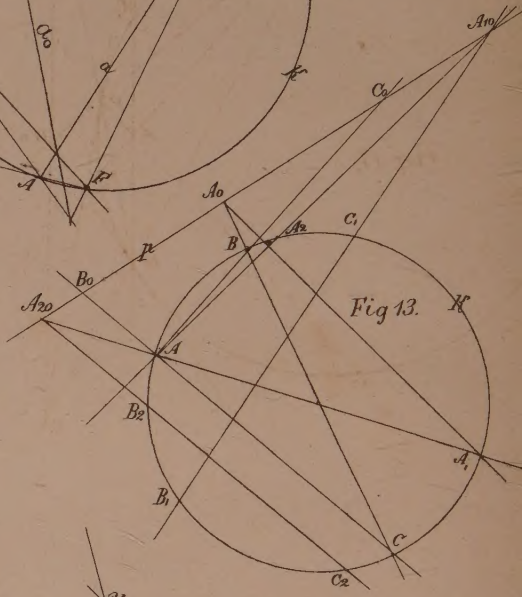
Tafel II.

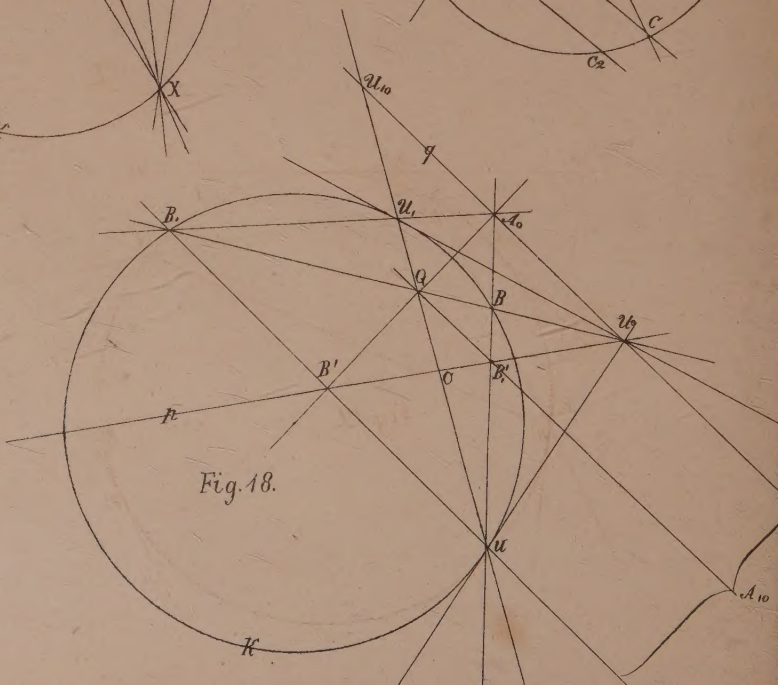


Tafel III.









Tafel IV.

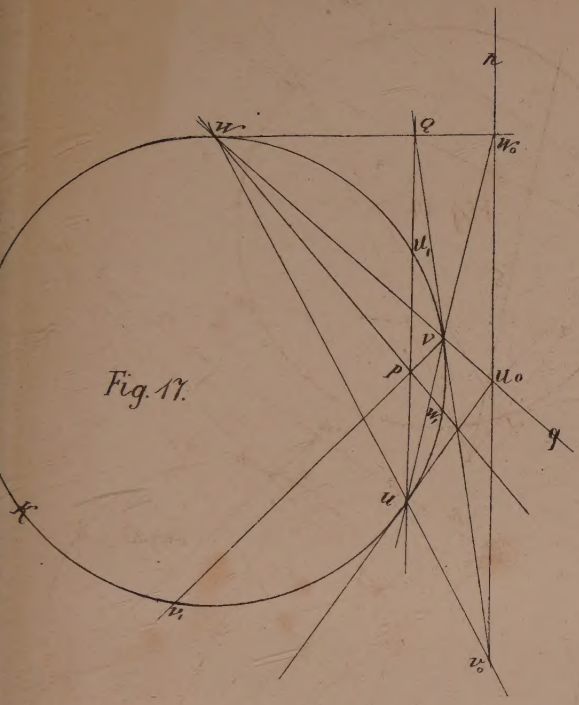


Fig. 17.

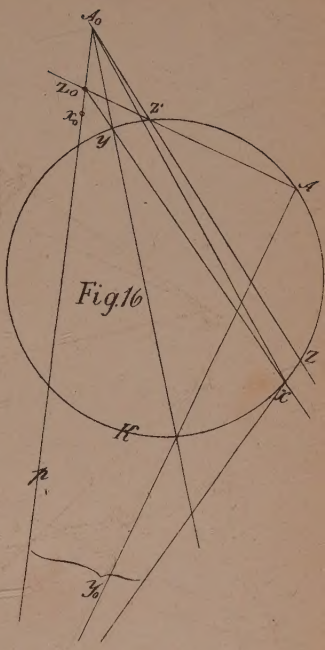


Fig. 16

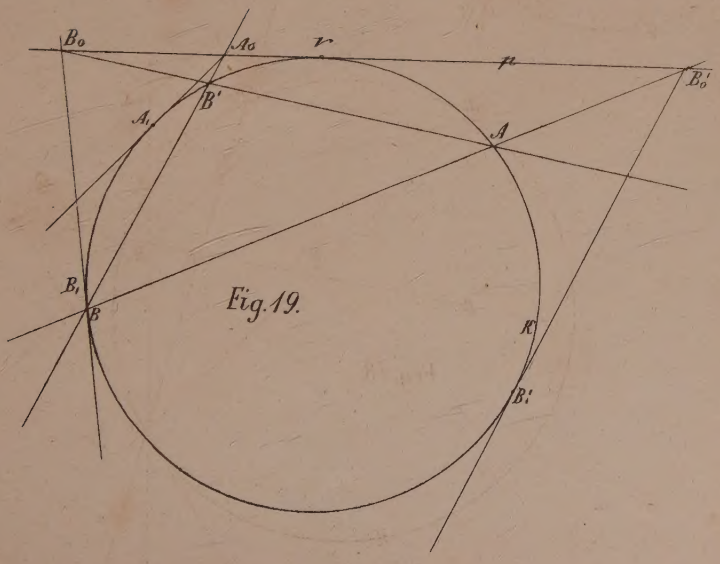


Fig. 19.